

UDC 512.581.2, 004.032.26

Направленные бинарные категорные склейки, принцип двойственности и категорная модель нейронных сетей

Толоконников Г.К. (ФНАЦ ВИМ РАН)

Теория категорных систем, развиваемая автором, позволяет естественным образом смоделировать традиционные искусственные нейронные сети произвольной топологии, сети живых нейронов, у которых помимо спайковой коммуникации имеется несколько десятков других видов клеточной коммуникации, а также сетевые структуры, аналогичные высшим категориям. Математическим аппаратом категорных систем является теория категорных склеек, данная работа посвящена следующим вопросам этой теории. Вводятся и изучаются направленные бинарные категорные склейки, являющиеся обобщением обычных категорий, в теории которых, как известно, большую роль играет понятие дуальности категорий и принцип двойственности, основанный на дуальности. В теории категорных склеек помимо дуальности аналогичной дуальности, порождаемой заменой направления стрелок категории, имеется новый вид дуальности, связанный с заменой имен стрелок на имена свёрток, обобщающих обычную операцию композиции. Проведено построение дуальных в обоих смыслах категорных склеек изучаемого типа, доказаны теоремы, отвечающие принципам двойственности для указанных двух видов дуальности. Теоремы приведены в рамках теории доказательств, для частного случая обычных категорий дающие новые доказательства принципа двойственности. Обобщение подхода на свёрточные аналоги мультикатегорий находят приложения в нейронных сетях, в частности, для известных формул С. Осовского в методе обратного распространения ошибки.

Keywords: *нейронные сети, категории, мультикатегории, поликатегории, свёрточные поликатегории, категорные склейки, системы, функциональные системы, категорные системы, системообразующий фактор, дуальность, принцип двойственности*

1. Введение

Теоретико-множественной парадигмой мы будем называть положение о том, что объекты физического и ментального мира моделируются с помощью множеств и подмножеств. Известный многотомный курс Николая Бурбаки формализовал теоретико-множественную парадигму. Мы используем системную парадигму, когда множества и подмножества

заменены на системы и их совокупности. Понятие «множество» имеет интуитивную интерпретацию в наивной теории множеств. Наивная теория множеств формализуется в виде аксиоматических теорий множеств.

Мы используем понятие категорной системы в качестве системы. Мы предложили формализацию интуитивного понятия системы в рамках категорной теории систем.

Интуитивное понятие системы, которое мы используем, обобщает функциональные системы Петра Кузьмича Анохина, открытые им в двадцатые годы прошлого века. Отметим, что приоритет открытия ключевых положений кибернетики (обратная связь и тому подобное) Норберт Винер публично признал за Петром Кузьмичом Анохиным будучи в Москве на конгрессе в 1960 году, поскольку эти положения содержались в теории функциональных систем (почти за 20 лет до выхода известной книги Винера по кибернетике).

Основным открытием Петра Кузьмича Анохина в теории систем является системообразующий фактор, трактуемый им в физиологии, как полезный результат для организма.

Функциональная система трактуется как инструмент, переводящий организм из имеющегося состояния в состояние с достигнутым полезным результатом. Подобному определению функциональной системы соответствует понятие стрелки в теории категорий с началом в виде исходного состояния и концом в виде состояния с достигнутым полезным результатом. Адекватным языком при таком подходе к системам является язык теории категорий.

Категорная природа функциональных систем вскрыта в категорной теории систем, где системообразующий фактор обобщён для случаев, включающих неживые и другие системы.

Согласно системной парадигме функциональная система и категорная система формируются из других систем, которые становятся подсистемами формируемой системы. Соединение систем в формируемую систему в категорной теории систем осуществляется с помощью операции свёртки.

Важным положением теории функциональных систем, ставшим в теории категорных систем постулатом, является требование выводить все свойства системы, исходя из её системообразующего фактора. Описание свойств системы проводится в рамках теории объекта, который является данной системой, указанные требования приводят к необходимости для теории каждой системы вырабатывать, в частности, алфавит, язык, понятие высказывания, конструктивные операции, понятие истинности высказываний,

логику, исходя из системообразующего фактора. По поводу сказанного за деталями можно обратиться [1] к докладу автора на конференции MathAI-2025 (<https://siriusmathcenter.ru/055w>) и имеющимся там ссылкам. Отметим, что подобное системное построение теории в значительной степени проведено Андреем Андреевичем Марковым для теории слов в алфавитах в его книге [2].

Известное определение Месаровича [3] задаёт систему в рамках теоретико-множественной парадигмы в виде отношения на декартовом произведении множества входов и множества выходов (чёрный ящик). Категорным обобщением системы по Месаровичу является полистрелка поликатегории. Поликатегории ввёл Сабо в 1975 году. Соединение полистрелок осуществляется обычными композициями, имеющими, как показал Гарнер [4], ограниченные возможности. Автор заменил композиции на операцию свёрток, возникли свёрточные поликатегории, которые в отличие от поликатегорий Сабо позволяют, например, моделировать спайковые соединения нейронов, в том числе, моделировать искусственные нейронные сети произвольной топологии. В дальнейшем теория свёрточных поликатегорий была расширена автором до теории категорных склеек, в которой оказалось возможным моделировать неспайковые связи нейронов и других клеток, а также аналоги нейронных сетей, отвечающих высшим категориям.

В искусственных нейронных сетях отдельные нейроны соединяются друг с другом так, что с выхода аксона нейрона путь сигнала (пунктир на рис. 1) разветвляется для соединения нейрона с несколькими другими нейронами, при этом возникает точка ветвления (синяя точка на рис. 1). Точка ветвления с пунктирными линиями отвечает указанной свёртке в категорной модели нейросети. Непосредственно видно, что свертка напоминает нейрон. Это наблюдение на интуитивном уровне отвечает исследуемому в работе новому виду дуальности («между» мультистрелками и свертками) в мультикатегориях.

Нижняя часть рисунка 1 изображает нейронную сеть с нейронами, имеющими один вход и один выход, моделируемую в нашем подходе направленными бинарными склейками.

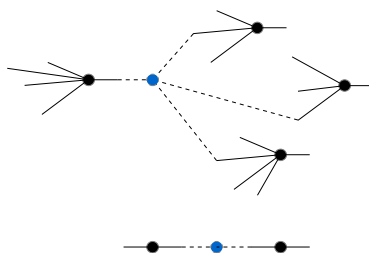


Рис.1. Соединение в искусственной нейросети нейронов свёрткой (пунктир)

В настоящей работе мы проведём полное построение с выделением конструктивной части основ теории бинарных направленных склеек, частным случаем которых являются обычные категории. В частности, будет детально описан новый вид дуальности, имеющей место для бинарных склеек, помимо дуальности (двойственности), отвечающей смене направления стрелок в обычных категориях, и дано доказательство расширенного принципа двойственности, аналогичного имеющемуся принципу двойственности теории категорий [5].

Аналогичные результаты имеют место для свёрточных мультикатегорий (моделирующих нейронные сети произвольной топологии), их детальное изложение отложено до отдельной статьи.

С точки зрения категорной теории систем естественным образом выделяется (что сделано в работе для теории бинарных склеек) конструктивная часть теории (общесистемная конструктивность, см. [1]), к которой могут быть добавлены различные логики. Здесь мы касаемся классической логики, интуиционистской логики, приводим ряд замечаний по конструктивной логике А.А.Маркова [2], изложение ведется в рамках теории доказательств. Тематика статьи носит весьма междисциплинарный характер, поэтому желательно достаточно подробное изложение, чему уделено внимание в статье (приведены некоторые несложные выкладки, деревья выводов и т.п.).

2. Категорные склейки

Рассмотрим следующий язык, имеющий 8 сортов. Мы не фиксируем заранее логику, оставаясь в рамках конструктивного подхода, с конструктивной операцией приписывания букв алфавита к имеющемуся слову. Алфавит имеет переменные x и, соответственно, функциональные символы проекций $x_m^{(i)}, C^{(j)}$, $i, j=1,2,\dots, 8$, m - натуральное число, выбор i или j означает выбор сорта переменной. Обычным образом вводим в левой польской записи (без использования скобок при построении термов и формул) термы $t^{(i)}, v^{(j)}$, ... построенные из указанных переменных и проекций, отмечая явно сорт терма верхним индексом.

Введём двуместные буквы равенства для каждого сорта $=_i$, при этом некоторые равенства $w^{(i)}=_j v^{(j)}$ определяют оговариваемые явно конструктивные операции, используемые для построения формул гребней категорных склеек.

Иногда для наглядности мы выписываем выражения с равенствами обычным образом, в этих случаях их польская запись легко восстанавливается.

Вводим функциональные символы ξ_{ij} вида $(i \rightarrow j)$ со свойствами (аксиомами)

$$\xi_{ij} \xi_{ji} t^{(i)} =_i t^{(i)}, i \neq j. \quad (1)$$

Введём также равенства между сортами, как обозначения $t^{(i)} =_{ij} v^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} t^{(i)} =_i \xi_{ij} v^{(j)}$.

Базовыми формулами назовём выражения вида

$$t^{(i)} =_{ij} v^{(j)}. \quad (2)$$

Некоторые явно выписываемые формулы мы называем **аксиомами**. Аксиомы определяют используемые для построения формул гребней склеек конструктивные операции.

Для каждого i обозначим $C_i^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{ij} C^{(j)} \xi_{ji}$ и вводим аксиомы

$$C_i^{(k)} C_i^{(j)} t^{(i)} =_i C_i^{(l)} t^{(i)}.$$

Таким образом, функциональные символы образуют алгебру, с таблицей умножения, отвечающей последним аксиомам.

Для бинарных склеек по определению эта алгебра имеет вид

$$C_i^{(k)} C_i^{(j)} t^{(i)} =_i C_i^{(j)} t^{(i)}. \quad (3)$$

Данные равенства задают по определению конструктивные операции, называемые **правилами приведения проекций**: терм $C_i^{(k)} C_i^{(j)} t^{(i)}$ заменяется на терм $C_i^{(j)} t^{(i)}$. Конструктивные операции со словами обычно можно записать в виде нормальных алгоритмов А.А.Маркова, так, правило приведения проекций можно задать в виде алгоритма с одной формулой подстановки $C_i^{(k)} C_i^{(j)} \rightarrow C_i^{(j)}$.

Для построения гребней категорных склеек постулируем применение следующего **правила приведения равенств к проекциям**:

$$x_i = C x_j \text{ заменяется на формулу } C x_i = C x_j.$$

Это правило согласуется с предыдущими аксиомами алгебры проекций.

Вводим в алфавит знак конъюнкции $\wedge$, как бинарный функциональный знак на формулах. **Формулами** называем выражения, получаемые применением конъюнкции к базовым формулам и любым выражениям полученным таким применением. Чтобы охватить конструктивный случай, мы не используем без отдельных оговорок понятие множества (совокупности) всех формул и других понятий, где необходимо обращаться к актуальной бесконечности.

Постулируем свойство **ассоциативности конъюнкции**, что позволяет не использовать скобок при обычной записи конъюнкций. Точнее, вводится конструктивная операция, используемая при построении формул гребней склеек, **приведения конъюнкций**, формула $\wedge fgh$ переходит в формулу $f \wedge g \wedge h$, а формула $\wedge f \wedge gh$ переходит в формулу $f \wedge gh$.

Вводим также переменные $a_k^{(i)}$ со свойствами

$$a_k^{(i)} = C^{(i)} x_k^{(i)}. \quad (4)$$

Расширим правило приведения проекций, добавив в него правило замены, задаваемой формулой подстановки $C^{(j)} a_k^{(i)} \rightarrow a_k^{(j)}$.

Вводим для каждого сорта набор функциональных символов $\mu_l^{(i)}, \dots, l=1, 2, \dots$, как символов n -арных операций, $n=0, 1, 2, 3, \dots$, расширяем понятие термина, включив указанные операции в процедуру построения термов.

Категория является совокупностью стрелок (если объекты отождествлять, как это часто делается, с единичными стрелками), имеющими наглядный образ направленных отрезков. Аналогично категорная склейка имеет в качестве элементов изображаемые наглядно ряды вертикальных чёрточек, которые мы будем называть **гребнями**, как и соответствующие им формулы. Определяемый ниже гребень категорной склейки состоит из внешнего гребня, внешней свёртки, внутреннего гребня и внутренней свёртки.

Для введенных 8 сортов используем следующие обозначения (z - один из символов, имеющих сорт):

$$z^{(3)} = z^{(1)}, z^{(4)} = z^{(2)}, z^{(5)} = \bar{z}^{(1)}, z^{(6)} = \bar{z}^{(2)}, z^{(7)} = \bar{z}^{(1)}, z^{(8)} = \bar{z}^{(2)}.$$

Используя коммутативность и ассоциативность конъюнкции, формулу в языке можно выписать в 2x2-таблице, считая формулы в клетках таблицы соединенными не указываемыми в такой записи конъюнкциями, переход к такой записи формулы является **конструктивной операцией**.

В ячейку (1,1) размещаем нештрихованные и без надчеркивания букв подформулы **внешних гребней**. В ячейку (1,2) размещаем содержащие буквы со штрихами подформулы **внешних свёрток**. В ячейку (2,1) размещаем содержащие буквы с надчеркиванием подформулы **внутренних гребней** и в ячейку (2,2) размещаем содержащие буквы с надчеркиванием и штрихами подформулы **внутренних свёрток**:

u	v'
$\bar{w}$	$\bar{r}'$

При размещении формулы в таблице штрихов и надчеркиваний можно не указывать, они при необходимости восстанавливаются очевидным образом.

Для сортов имеем

1, 2	3, 4
5, 6	7, 8

или мнемонически
в обозначениях, заданных выше

1, 2	1', 2'
$\bar{1}, \bar{2}$	$\bar{1}', \bar{2}'$

Мы, не имея пока никакой логики, не задаёмся вопросом (и не делаем подобных утверждений) всякая ли формула может быть приведена к виду таблицы (или ко всякой ли формуле может быть применена данная конструктивная операция).

Определение

Определим конструктивные **операции проекций** P_{ij} , $i, j=1, 2$, которые переводят исходный гребень, в результирующий гребень, заменой на знак пустого множества всех формул в клетках, отличных от клетки (i, j) .

Определение

Полным базовым гребнем называется формула, составленная из конъюнкций формул $(i, j = 1, 2)$

$$\begin{aligned} a_k^{(i)} &= {}_i C^{(i)} x_k^{(i)}, a_k'^{(i)} = {}_i C'^{(i)} x_k'^{(i)}, \\ \bar{a}_k'^{(i)} &= {}_i \bar{C}'^{(i)} \bar{x}_k'^{(i)}, \bar{a}_k^{(i)} = {}_i \bar{C}^{(i)} \bar{x}_k^{(i)} \end{aligned}$$

и равенств $\eta_k^{(i)} = \theta_m^{(j)}$, $\eta_k^{(i)}, \theta_m^{(j)}$ могут быть любыми из символов $a_n^{(i)}, x_m^{(i)}, n, m=1, 2, \dots$, в последних формулах знак равенства имеет соответствующие опущенные здесь индексы. При этом построение базового гребня включает правило приведения равенств к проекциям, в результате равенства в базовых гребнях содержат либо переменные, либо их проекции.

По построению формул полных базовых гребней подформулы равенства содержат только те буквы переменных, которые встретились в подформулах вида $a = Cx$. Это позволяет знаки равенства (формулы с равенствами переменных) исключить из таблицы, заменив формулы равенства пунктирами, соединяющими буквы переменных, входящие в равенства.

Определение

Базовые гребни, переменные $x_k^{(i)}$ которых входят в равенства (соединены пунктиром) называются **связными гребнями**.

По построению гребни состоят из связных гребней.

Для случая направленных бинарных склеек построение гребней проводится, начиная с некоторых внешних базовых гребней с помощью операций свёртки.

Определение

Внешними базовыми связными **гребнями** направленных бинарных склеек называются следующие формулы

$$a_k^{(1)} = C^{(1)} x_k^{(1)} \wedge a_m^{(2)} = C^{(2)} x_m^{(2)} \wedge x_k^{(1)} = {}_{1,2} x_m^{(1)}$$

или

$$a_k^{(1)} = C^{(1)} x_k^{(1)} \wedge a_m^{(2)} = C^{(2)} x_m^{(2)} .$$

Переменные $a_k^{(1)}$ называются **входами**, переменные $a_k^{(2)}$ называются **выходами**, (отсюда в названии склейки взят термин «направленный») алгебра проекций имеет вид (нижний индекс у C опущен):

$$C^{(1)} C^{(2)} t = C^{(2)} t, C^{(2)} C^{(1)} t = C^{(1)} t, C^{(1)} C^{(1)} t = C^{(1)} t, C^{(2)} C^{(2)} t = C^{(2)} t . \quad (5)$$

Таким образом, гребень в изучаемом случае состоит всего из двух «зубьев».

Определение

Внешними базовыми связными **свёртками** направленных бинарных склеек называются следующие формулы

$$a_k'^{(1)} = C'^{(1)} x_k'^{(1)} \wedge a_m'^{(2)} = C'^{(2)} x_m'^{(2)} \wedge x_k'^{(1)} = {}_{1,2} x_m'^{(2)}$$

или

$$a_k'^{(1)} = C'^{(1)} x_k'^{(1)} \wedge a_m'^{(2)} = C'^{(2)} x_m'^{(2)} .$$

Также переменные $a_k'^{(1)}$ называются **входами** (свёрток), переменные $a_k'^{(2)}$ называются **выходами** (свёрток).

Из введённых гребней и свёрток строятся, как это показано далее, остальные возможные полные гребни направленных бинарных склеек.

Рассмотрим следующий полный гребень, внешний гребень которого состоит из двух связных гребней, и имеющий равенства $a_2^{(2)} = a_5'^{(1)}, a_3^{(1)} = a_6'^{(2)}$

$a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)} \wedge a_3^{(1)} = C^{(1)} x_3^{(1)} \wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} x_4^{(2)}$	$a_5'^{(1)} = C'^{(1)} x_5'^{(1)} \wedge a_6'^{(2)} = C'^{(2)} x_6'^{(2)}$
$\emptyset$	$\emptyset$

На таких гребнях определим конструктивную операцию M_b , которая переводит в нижние клетки соединённые пунктиром равенства из разных клеток с соответствующей заменой сортов:

$a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge$	$\wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} x_4^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)} \wedge \bar{a}_3^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_3^{(1)}$		$\bar{a}_5^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_5^{(1)} \wedge \bar{a}_6^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_6^{(2)}$

Эта операция является одновременным применением операций

$$M_b^{(i)} x^{(i)} \rightarrow \bar{x}^{(i)}, M_b^{(i)} x'^{(i)} \rightarrow \bar{x}'^{(i)}, M_b^{(i)} a^{(i)} \rightarrow \bar{a}^{(i)}, M_b^{(i)} a'^{(i)} \rightarrow \bar{a}'^{(i)}, i=1,2.$$

Далее, определим конструктивную операцию M_l , которая переводит с соответствующей заменой сортов из правых клеток в левые клетки соединённые пунктиром равенства:

$a_1^{(1)}=C^{(1)}x_1^{(1)}\wedge$	$\wedge a_4^{(2)}=C^{(2)}x_4^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_2^{(2)}=\bar{C}^{(2)}\bar{x}_2^{(2)}\wedge\bar{a}_3^{(1)}=\bar{C}^{(1)}\bar{x}_3^{(1)}$		$\emptyset$
$\bar{a}_5^{(1)}=\bar{C}^{(1)}\bar{x}_5^{(1)}\wedge\bar{a}_6^{(2)}=\bar{C}^{(2)}\bar{x}_6^{(2)}$		

Эти операции являются одновременным применением наборов операций

$$M_l^{(i)} x'^{(i)} \rightarrow x^{(i)}, M_l^{(i)} \bar{x}'^{(i)} \rightarrow \bar{x}^{(i)}, M_l^{(i)} a'^{(i)} \rightarrow a^{(i)}, M_l^{(i)} \bar{a}'^{(i)} \rightarrow \bar{a}^{(i)}.$$

Введём также операции, противоположные предыдущим

$$M_r^{(i)} x^{(i)} \rightarrow x'^{(i)}, M_r^{(i)} \bar{x}^{(i)} \rightarrow \bar{x}'^{(i)}, M_r^{(i)} a^{(i)} \rightarrow a'^{(i)}, M_r^{(i)} \bar{a}^{(i)} \rightarrow \bar{a}'^{(i)}.$$

Для направленных бинарных склеек вводится тернарная операция умножения μ , согласованная с проекциями с помощью аксиом

$$C^{(1)} \mu^{(1)} x_p^{(1)} x_q^{(1)} x_r^{(1)} = C^{(1)} x_p^{(1)}, C^{(2)} \mu^{(2)} x_p^{(2)} x_q^{(2)} x_r^{(2)} = C^{(2)} x_q^{(2)}, \quad (6)$$

где $x_p^{(1)}, x_q^{(1)}, x_p^{(2)}, x_q^{(2)}$ - переменные перемножаемых первых двух связанных гребней и $x_r^{(2)}, x_r^{(2)}$ - переменные третьего из перемножаемых трех гребней соответствующих свёртке с переменными $x_r'^{(2)} x_r'^{(2)}$.

Данные аксиомы задают конструктивные операции **согласования умножения с проекциями**, применяемыми по отдельности следующими правилами подстановки:

$$\begin{aligned} C^{(1)} \mu^{(1)} x_p^{(1)} x_q^{(1)} x_r^{(1)} \rightarrow C^{(1)} x_p^{(1)}, C^{(1)} x_p^{(1)} \rightarrow C^{(1)} \mu^{(1)} x_p^{(1)} x_q^{(1)} x_r^{(1)}, \\ C^{(2)} \mu^{(2)} x_p^{(2)} x_q^{(2)} x_r^{(2)} \rightarrow C^{(2)} x_q^{(2)}, C^{(2)} x_q^{(2)} \rightarrow C^{(2)} \mu^{(2)} x_p^{(2)} x_q^{(2)} x_r^{(2)}. \end{aligned}$$

Данные согласования отвечают перемножению гребней, при котором не меняются начальная проекция у первого сомножителя и конечная проекция у второго сомножителя, так же, как это имеет место при перемножении стрелок в категориях. Далее, определяется с помощью пятиместной операции умножения случай, когда указанные проекции также изменяются при перемножении гребней.

Помимо конструктивных операций M_b, M_l для полного определения умножения гребней вводится конструктивная операция E_v , переводящая предыдущую формулу в следующую формулу

$a_1^{(1)} = C^{(1)} \mu^{(1)} x_1^{(1)} x_3^{(1)} x_5^{(1)} \wedge$ $\wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} \mu^{(2)} x_2^{(2)} x_4^{(2)} x_6^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)} \wedge \bar{a}_3^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_3^{(1)}$ $\bar{a}_5^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_5^{(1)} \wedge \bar{a}_6^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_6^{(2)}$	$\emptyset$

Полученный полный гребень даёт произведение двух базовых гребней с помощью имеющейся свёртки, то есть задает бинарную операцию, обозначим ее через λ_2 (для двух внешних гребней, $\lambda_2 x_1 x_3 x'_5$, а свёртка x'_5 является параметром), и является результатом применения соответствующих конструктивных операций. Умножение пары уже построенных гребней по определению проводится также, при этом очевидным образом накапливаются внутренние гребни. Полный гребень содержит в виде своего внутреннего гребня историю получения из базовых гребней. Для теории систем этот механизм формализует получение системы из других систем, становящихся её подсистемами [7].

Рассмотрим следующий полный гребень (клетка (1,2) расположена над клеткой (1,1)).

(1,2)	$a_7^{(1)} = C^{(1)} x_7^{(1)} \wedge a_8^{(2)} = C^{(2)} x_8^{(2)} \wedge a_9^{(1)} = C^{(1)} x_9^{(1)} \wedge a_{10}^{(2)} = C^{(2)} x_{10}^{(2)}$	
(1,1)	$a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)} \wedge a_3^{(1)} = C^{(1)} x_3^{(1)} \wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} x_4^{(2)} \wedge a_5^{(1)} = C^{(1)} x_5^{(1)} \wedge a_6^{(2)} = C^{(2)} x_6^{(2)}$	
(2,1)	$\emptyset$	$\emptyset$ (2,2)

Результат применения имеющихся свёрток зависит от порядка применения свёрток. Если сначала применяется левая свёртка, то получаем

$a_1^{(1)} = C^{(1)} \mu^{(1)} x_1^{(1)} \mu^{(1)} x_3^{(1)} x_7^{(1)} x_5^{(1)} x_9^{(1)} \wedge a_6^{(2)} = C^{(2)} \mu^{(2)} x_2^{(2)} \mu^{(2)} x_4^{(2)} x_8^{(2)} x_6^{(2)} x_{10}^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)} \wedge \bar{a}_3^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_3^{(1)} \wedge \bar{a}_7^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_7^{(1)} \wedge \bar{a}_8^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_8^{(2)}$ $\bar{a}_4^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{\mu}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)} \bar{x}_4^{(2)} \bar{x}_8^{(2)} \wedge \bar{a}_5^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_5^{(1)} \wedge \bar{a}_9^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_9^{(1)} \wedge \bar{a}_{10}^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_{10}^{(2)}$	$\emptyset$

Если сначала применяется правая свёртка, то получаем

$a_1^{(1)} = C^{(1)} \mu^{(1)} x_1^{(1)} \mu^{(1)} x_3^{(1)} x_5^{(1)} x_9^{(1)} x_7^{(1)} \wedge a_6^{(2)} = C^{(2)} \mu^{(2)} x_2^{(2)} \mu^{(2)} x_4^{(2)} x_6^{(2)} x_{10}^{(2)} x_8^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)} \wedge \bar{a}_3^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{\mu}^{(1)} \bar{x}_3^{(1)} \bar{x}_5^{(1)} \bar{x}_9^{(1)} \wedge \bar{a}_7^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_7^{(1)} \wedge \bar{a}_8^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_8^{(2)}$ $\bar{a}_4^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_4^{(2)} \wedge \bar{a}_5^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_5^{(1)} \wedge \bar{a}_9^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_9^{(1)} \wedge \bar{a}_{10}^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_{10}^{(2)}$	$\emptyset$

Определение

Формулу

$$\mu^{(i)} u^{(i)} \mu^{(i)} v^{(i)} w^{(i)} r^{(i)} s^{(i)} = \mu^{(i)} \mu^{(i)} u^{(i)} v^{(i)} r^{(i)} w^{(i)} s^{(i)}, i=1,2 \quad (7)$$

назовём **аксиомой ассоциативности**, она определяет конструктивные операции с помощью следующих действующих в соответствующих алгорифмах по отдельности формул подстановки

$$\begin{aligned} \mu^{(i)} u^{(i)} \mu^{(i)} v^{(i)} w^{(i)} r^{(i)} s^{(i)} &\rightarrow \mu^{(i)} \mu^{(i)} u^{(i)} v^{(i)} r^{(i)} w^{(i)} s^{(i)}, \\ \mu^{(i)} \mu^{(i)} u^{(i)} v^{(i)} r^{(i)} w^{(i)} s^{(i)} &\rightarrow \mu^{(i)} u^{(i)} \mu^{(i)} v^{(i)} w^{(i)} r^{(i)} s^{(i)}. \end{aligned}$$

Для бинарной операции на гребнях имеем (сорта не указаны)

$$\begin{aligned} \lambda_2 u \lambda_2 v w r' s' &\rightarrow \lambda_2 \lambda_2 u v r' w s', \\ \lambda_2 \lambda_2 u v r' w s' &\rightarrow \lambda_2 u \lambda_2 v w r' s'. \end{aligned}$$

Если имеется гребень с подформулой $a^{(i)} = C^{(i)} \mu^{(i)} u^{(i)} \mu^{(i)} v^{(i)} w^{(i)} r^{(i)} s^{(i)}$, то используя аксиому ассоциативности можно получить (например, если внутренний гребень у исходного гребня пустой) в качестве гребня новый гребень с подформулой $a^{(i)} = C^{(1)} \mu^{(i)} \mu^{(i)} u^{(i)} v^{(i)} r^{(i)} w^{(i)} s^{(i)}$. Этот новый гребень вполне может быть получен другим способом (с помощью операций свёртки и проекций). Подчеркнём, что мы не заботимся о том, чтобы использовать некоторый *минимальный* набор конструктивных операций для построения направленных бинарных склеек.

Далее мы будем операцию μ обозначать μ .

3. Категорные диаграммы

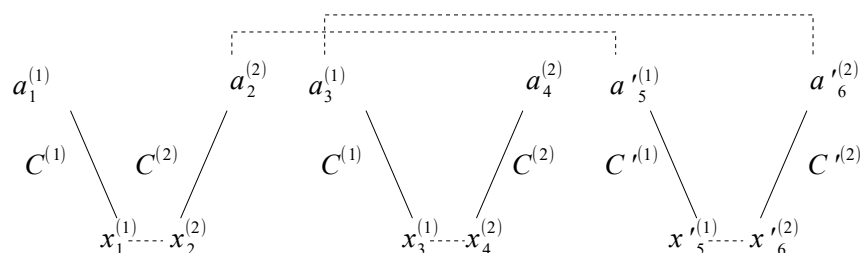
Воспользуемся приёмом, который использован во введенной в [6] аксиоматике теории категорий для графической записи формул языка. Неформальное обсуждение и детали аналога этого применения для категорных склеек можно найти в [7].

Определим графическое изображение формул.

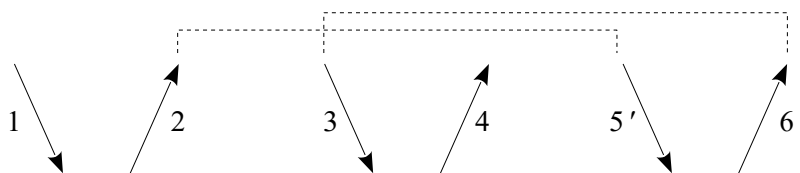
Основной полный гребень со свёрткой

$a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)} \wedge a_3^{(1)} = C^{(1)} x_3^{(1)} \wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} x_4^{(2)}$	$a_5'^{(1)} = C'^{(1)} x_5'^{(1)} \wedge a_6'^{(2)} = C'^{(2)} x_6'^{(2)}$
$\emptyset$	$\emptyset$

имеет изображение



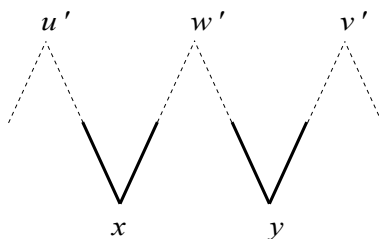
или в кратком варианте



(8)

4. Общая бинарная операция в бинарных направленных склейках

Рассмотрим следующую бинарную операцию λ на гребнях $z = \lambda u' x w' y v'$, (u' , w' , v' рассматриваются как параметры бинарной операции λ от двух внешних гребней x и y), изменяющую все проекции сомножителей и выполняемую аналогичным приведённым выше вариантам



После выполнения операций M (с индексами) и Ev получаем внешний гребень z

$$C^{(1)}z^{(1)} = C^{(1)}u^{(1)} \wedge C^{(2)}z^{(2)} = C^{(2)}v^{(2)} \wedge z^{(1)} = z^{(2)},$$

$$z^{(i)} = \lambda^{(i)} u^{(i)} x^{(i)} w^{(i)} y^{(i)} v^{(i)};$$

$$\lambda^{(i)} u^{(i)} x^{(i)} w^{(i)} y^{(i)} v^{(i)} = \mu_5^{(i)} u^{(i)} x^{(i)} w^{(i)} y^{(i)} v^{(i)}, i=1,2.$$

Дополняя этим гребнем предыдущий гребень, получим



Операция μ_5 на пяти гребнях определяет также тернарную операцию ρ на гребнях, которая нам понадобится

$$\rho^{(i)} u^{(i)} x^{(i)} w^{(i)} y^{(i)} v^{(i)} = \mu_5^{(i)} u^{(i)} x^{(i)} w^{(i)} y^{(i)} v^{(i)}, i=1,2$$

поскольку $x^{(1)} = \xi_{13} x'^{(1)}, x^{(2)} = \xi_{24} x'^{(2)}, y^{(1)} = \xi_{13} y'^{(1)}, y^{(2)} = \xi_{24} y'^{(2)}$, то вводим операцию

«снятия штриха» $\xi^- = (\xi_{13}, \xi_{24}), \xi^-(x') = \xi^-(x'^{(1)}, x'^{(2)}) = (x^{(1)}, x^{(2)})$ имеем

$$\rho^{(i)} u^{(i)} x^{(i)} w^{(i)} y^{(i)} v^{(i)} = \mu_5^{(i)} u^{(i)} \xi^- x'^{(i)} w^{(i)} \xi^- y'^{(i)} v^{(i)} =$$

$$= \mu_5^{(i)} \xi_{II}^- \xi_{IV}^- u^{(i)} x'^{(i)} w^{(i)} y'^{(i)} v^{(i)}, \rho^{(i)} = \mu_5^{(i)} \xi_{II}^- \xi_{IV}^-$$

Аналогично имеем $\lambda^{(i)} = \mu_5^{(i)} \xi_I^- \xi_{III}^- \xi_{V}^-$.

Приведём конструктивное описание операции λ (и μ_5).

Полный гребень имеет вид

$a_1^{(1)} = C^{(1)}x_1^{(1)} \wedge a_1^{(2)} = C^{(2)}x_1^{(2)} \wedge a_2^{(1)} = C^{(1)}x_2^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)}x_2^{(2)}$	$a_w'^{(1)} = C'^{(1)}w'^{(1)} \wedge a_w'^{(2)} = C'^{(2)}w'^{(2)}$ $a_u'^{(1)} = C'^{(1)}u'^{(1)} \wedge a_u'^{(2)} = C'^{(2)}u'^{(2)}$ $a_v'^{(1)} = C'^{(1)}v'^{(1)} \wedge a_v'^{(2)} = C'^{(2)}v'^{(2)}$
$\emptyset$	$\emptyset$

Применим операцию M_b , получим

$\emptyset$	$a_u^{(1)} = C^{(1)} u^{(1)} \quad a_v^{(2)} = C^{(2)} v^{(2)}$
$\bar{a}_1^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_1^{(1)} \wedge \bar{a}_1^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_1^{(2)} \wedge \bar{a}_2^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_2^{(1)} \wedge \bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)}$	$\bar{a}_u^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{u}^{(2)} \quad \bar{a}_v^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{v}^{(1)}$
	$\bar{a}_w^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{w}^{(1)} \wedge \bar{a}_w^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{w}^{(2)}$

Применим операцию M_l , получим

$a_u^{(1)} = C^{(1)} u^{(1)} \quad a_v^{(2)} = C^{(2)} v^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_1^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_1^{(1)} \wedge \bar{a}_1^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_1^{(2)} \wedge \bar{a}_2^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_2^{(1)} \wedge \bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_u^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{u}^{(2)} \quad \bar{a}_v^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{v}^{(1)}$	
$\bar{a}_w^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{w}^{(1)} \wedge \bar{a}_w^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{w}^{(2)}$	

Применим операцию $E\nu$, получим окончательно, вводя обозначение для требуемой пятиместной операции μ_5 на пяти внешних гребнях u, x_1, w, x_2, v

$a_u^{(1)} = C^{(1)} x_3^{(1)} \wedge a_v^{(2)} = C^{(2)} x_3^{(2)} \wedge x_3^{(1)} = x_3^{(2)} \wedge x_3^{(1)} = \mu_5^{(1)} u^{(1)} x_1^{(1)} w^{(1)} x_2^{(1)} v^{(1)} \wedge x_3^{(2)} = \mu_5^{(2)} u^{(2)} x_1^{(2)} w^{(2)} x_2^{(2)} v^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_1^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_1^{(1)} \wedge \bar{a}_1^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_1^{(2)} \wedge \bar{a}_2^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_2^{(1)} \wedge \bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_u^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{u}^{(2)} \quad \bar{a}_v^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{v}^{(1)}$	
$\bar{a}_w^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{w}^{(1)} \wedge \bar{a}_w^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{w}^{(2)}$	

Частным случаем операции λ является следующее построение её варианта из подходящих бинарных операций.

Определим следующую бинарную (по гребню и свёртке) операцию μ_r , действующую на полный гребень

$a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)}$	$a_3^{(1)} = C^{(1)} x_3^{(1)} \wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} x_4^{(2)}$
$\emptyset$	$\emptyset$

Применяем операцию M_b , получаем

$a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge$	$\wedge a_4'^{(2)} = C'^{(2)} x_4'^{(2)}$
$\bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)}$	$\bar{a}_3'^{(1)} = \bar{C}'^{(1)} \bar{x}_3'^{(1)}$

Применяем операцию M_l , получаем

$a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge$	$\wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} x_4^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)}$	$\bar{a}_3^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_3^{(1)}$	$\emptyset$

Применяем операцию Ev , получаем

$a_1^{(1)} = C^{(1)} \mu_r^{(1)} x_1^{(1)} x_3^{(1)} \wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} \mu_r^{(2)} x_2^{(2)} x_4^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)} \quad \bar{a}_3^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_3^{(1)}$	$\emptyset$

Необходимую бинарную операцию на двух внешних гребнях мы обозначили той же буквой μ_r .

Определим следующую бинарную (по гребню и свёртке) операцию μ_l , действующую на полный гребень

$a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)}$	$a_3'^{(1)} = C'^{(1)} x_3'^{(1)} \wedge a_4'^{(2)} = C'^{(2)} x_4'^{(2)}$
$\emptyset$	$\emptyset$

Применяем операции M_b , M_l , Ev , получаем

$a_1^{(1)} = C^{(1)} \mu_l^{(1)} x_3^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_4^{(2)} = C^{(2)} \mu_l^{(2)} x_4^{(2)} x_2^{(2)}$	$\emptyset$
$\bar{a}_4^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_4^{(2)} \quad \bar{a}_1^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_1^{(1)}$	$\emptyset$

Необходимую бинарную операцию на двух внешних гребнях мы обозначили той же буквой μ .

Операции μ_r , μ_l , также как и μ , согласованы с проекциями.

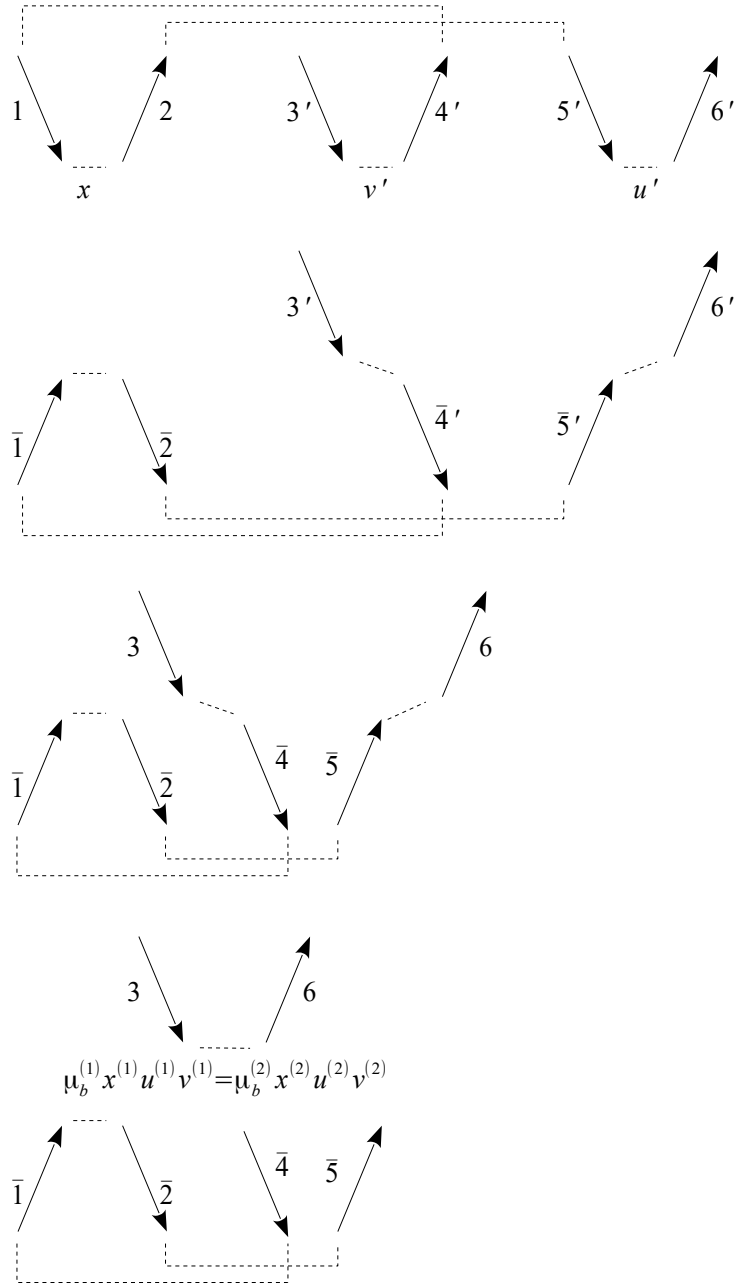
Тернарную операцию $\mu_l^{(i)} x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$ можно сузить до операции (если для определённости принять, что сначала действует операция μ_l и затем μ_r)

$$\mu_l^{(i)} x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)} \rightarrow \mu_r^{(i)} x^{(i)} \mu_l^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}, i=1,2.$$

Введём ещё тернарную (по гребню и двум свёрткам) операцию μ_b , следующим образом, используя аналогичным способом имеющиеся операции.

Сводящийся к бинарным операциям вариант этой операции имеет вид (индекс сорта не приводится, для определённости сначала примем действие операции μ_r , потом операции μ_l)

$$\mu_b x u v \stackrel{\text{def}}{=} \mu_l \mu_r x u v$$



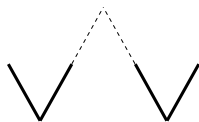
Теперь мы можем получить из бинарных операций вариант общей бинарной операции направленных бинарных склеек, при этом индекс 5 можно уже не использовать (индекс сорта не приводится):

$$\mu_i x w y v \stackrel{\text{def}}{=} \mu_b \mu_i x y w u v \stackrel{\text{def}}{=} \mu_l \mu_r \mu_r x \mu_l y w u v \quad .$$

На переменные u , w , v можно смотреть как на параметры для операции перемножения двух гребней x и y .

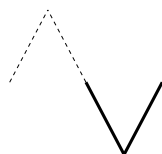
5. Нерв бинарной направленной склейки

Рассмотрим конструктивную операцию выписывания следующего вида формул. Первый шаг - это операция P_0 построения формулы (8), которую мы изобразим в сокращённом виде (здесь свёртки выписываем вверху пунктиром)

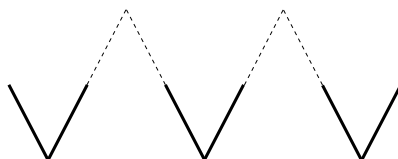


Назовем эту формулу *цепочкой гребней* из двух звеньев.

Следующей конструктивной операцией P определим приписывание справа к имеющейся цепочке формулы



с результатом в виде диаграммы *цепочки гребней* из трех звеньев



Эту формулу можно двумя разными способами, выполняя в той или иной последовательности имеющиеся свёртки (здесь используется операция μ) превратить в соответствующий полный гребень. Поэтому *цепочкой из трех звеньев* назовём два объекта: саму диаграмму и порядок возможного перемножения гребней. Если три гребня обозначить соответственно x, y, z , то мы получим две цепочки: $\mu_l x \mu_l y z$ и $\mu_l \mu_l x y z$.

Заменяя μ на операцию λ мы получим общий случай цепочек направленной склейки, который рассмотрим детальнее далее.

Определение

Формула, полученная применением указанных операций с указанием порядка применения свёрток называется *цепочкой гребней*. Набор трёх указанных конструктивных операций (P_0 , P и указание порядка) называется *конструктивным нервом* данной категорной склейки.

Полезно определить бинарную на цепочках *операцию соединения цепочек*, то есть операцию приписывания справа гребня к имеющемуся гребню, для чего достаточно приписывания свёртки (или бинарной операции μ , λ и др.), соединяющей проекцию второго

сорта последнего гребня с проекцией первого сорта первого гребня присоединяемой слева цепочки, и определения порядка: порядок первой цепочки, порядок второй цепочки и затем применение добавленной свёртки или операции.

Мы оставляем те же названия для цепочек, в которых вместо указанных свёрток используется операция λ .

Перейдём к конструктивным операциям дуальности.

6. Сортная дуальность

Этот вид дуальности определяет общеизвестную дуальность в категориях, ряд основных понятий теории категорий, таких как понятия дуальной или двойственной категории, ковариантного и контравариантного функторов и других связанных с двойственностью категорных понятий.

Описание сортной дуальности состоит из нескольких шагов.

Вводится другой алфавит, взаимно однозначно соответствующий алфавиту имеющейся склейки. Далее, с помощью тех же конструктивных операций в новом алфавите строится язык для другой формальной склейки, далее, устанавливаются отвечающие сортной дуальности связи с первоначальной склейкой, позволяющие все операции в новой склейке получить из операций исходной. Указанные шаги удобно проводить, расширив, как указано, начальный алфавит его копией, используя переобозначения букв, и построив формальную склейку в этом новом алфавите. В расширенном языке мы получаем две формальные склейки, взаимоотношения которых (сортную дуальность) можно оформить подходящими функциональными буквами. Реализуем эту программу, уточняя необходимые детали.

Расширим построенный язык, добавив его копию, для чего вводим:

- восемь дополнительных сортов $s_1 = \{s_1^{(i)}, s_1'^{(i)}, \bar{s}_1^{(i)}, \bar{s}_1'^{(i)}\}$, $i=1,2$ для переменных (предыдущие сорта s_0 обозначим теми же буквами, заменив индекс 1 на 0, то есть используя обозначения $s^{(i)}_0$);

- новые буквы ($i=1,2$, $\alpha, \beta=1, \dots, 8$, k, m - натуральные числа, знак равенства оставим тем же, как и знак конъюнкции)

$$x_k^{(i)}, b_m^{(i)}, y_k'^{(i)}, b_m'^{(i)}, \bar{y}_k'^{(i)}, \bar{b}_m'^{(i)}, \bar{y}_k^{(i)}, \bar{b}_m^{(i)}, G^{(i)}, G'^{(i)}, \bar{G}^{(i)}, \bar{G}'^{(i)}, v^{(i)}, \theta^{(i)}, \sigma^{(i)}, =_{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\beta}, \wedge,$$

соответствующие имеющимся буквам

$$x_k^{(i)}, a_m^{(i)}, x_k'^{(i)}, a_m'^{(i)}, \bar{x}_k'^{(i)}, \bar{a}_m'^{(i)}, \bar{x}_k^{(i)}, \bar{a}_m^{(i)}, C^{(i)}, C'^{(i)}, \bar{C}^{(i)}, \bar{C}'^{(i)}, \mu^{(i)}, \lambda^{(i)}, \rho^{(i)}, =_{\alpha\beta}, \xi_{\alpha\beta}, \wedge.$$

Мы имеем конструктивную операцию замены формул и выражений, порожденную сменой алфавита, обозначим её R («*replacement*», переводит исходный язык в язык с другим

равномощным алфавитом), а также имеем обратную для нее R^{-1} (или короче R^{-}). Введённую копию языка будем называть ***R-копией***. Итак, для рассмотрения дуальности мы изучаем ***объединенный язык***, объединение языка склеек и его R -копии.

Для рассмотрения дуальности введём набор D функциональных символов и набор D^{-} обратных к ним символов (тип указан в скобках, $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} & D^{(i)}(s_0^{(i)} \rightarrow s_1^{(j)}), D'^{(i)}(s_0'^{(i)} \rightarrow s_1'^{(j)}), \bar{D}^{(i)}(\bar{s}_0^{(i)} \rightarrow \bar{s}_1^{(j)}), \bar{D}^{(i)}(\bar{s}_0^{(i)} \rightarrow \bar{s}_1^{(j)}), \\ & D^{-(i)}(s_1^{(i)} \rightarrow s_0^{(j)}), D'^{-(i)}(s_1'^{(i)} \rightarrow s_0'^{(j)}), \bar{D}^{-(i)}(\bar{s}_1^{(i)} \rightarrow \bar{s}_0^{(j)}), \bar{D}^{-(i)}(\bar{s}_1^{(i)} \rightarrow \bar{s}_0^{(j)}); \\ & Dx_k^{(i)} \rightarrow y_k^{(j)}, Da_k^{(i)} \rightarrow b_k^{(j)}, Dx_k'^{(i)} \rightarrow y_k'^{(j)}, Da_k'^{(i)} \rightarrow b_k'^{(j)}, \\ & D\bar{x}_k^{(i)} \rightarrow \bar{y}_k^{(j)}, D\bar{a}_k^{(i)} \rightarrow \bar{b}_k^{(j)}, D\bar{x}_k'^{(i)} \rightarrow \bar{y}_k'^{(j)}, D\bar{a}_k'^{(i)} \rightarrow \bar{b}_k'^{(j)}, \\ & D^- y_k^{(i)} \rightarrow x_k^{(j)}, D^- b_k^{(i)} \rightarrow a_k^{(j)}, D^- y_k'^{(i)} \rightarrow x_k'^{(j)}, D^- b_k'^{(i)} \rightarrow a_k'^{(j)}, \\ & D^- \bar{y}_k^{(i)} \rightarrow \bar{x}_k^{(j)}, D^- \bar{b}_k^{(i)} \rightarrow \bar{a}_k^{(j)}, D^- \bar{y}_k'^{(i)} \rightarrow \bar{x}_k'^{(j)}, D^- \bar{b}_k'^{(i)} \rightarrow \bar{a}_k'^{(j)}. \end{aligned}$$

Определим действие проекций G через проекции C .

$$\begin{aligned} G^{(i)} y_k^{(i)} &\stackrel{\text{def}}{=} DC^{(j)} D^- y_k^{(i)}, G'^{(i)} y_k'^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} DC'^{(j)} D^- y_k'^{(i)}, \\ \bar{G}^{(i)} \bar{y}_k^{(i)} &\stackrel{\text{def}}{=} D \bar{C}^{(j)} D^- \bar{y}_k^{(i)}, \bar{G}'^{(i)} \bar{y}_k'^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} D \bar{C}'^{(j)} D^- \bar{y}_k'^{(i)}. \end{aligned}$$

Определим аналогичную связь операций D, ξ_{ij}, η_{ij} соответствиями (здесь i, j берутся из набора чисел от 1 до 8) $\eta_{i-1j-1} \stackrel{\text{def}}{=} D \xi_{ij} D^-$, i, j - чётные числа; $\eta_{i+1j+1} = D \xi_{ij} D^-$, i, j - нечётные числа; $\eta_{i-1j+1} = D \xi_{ij} D^-$, i - чётное число, j - нечётное число; $\eta_{i+1j-1} = D \xi_{ij} D^-$, i - нечётное число, j - чётное число.

Дополняем конструктивные операции D и R до операций $\hat{D}$ и $\hat{R}$, включающих преобразования $\hat{D}: t_1 = t_2 \rightarrow D t_1 = D t_2, \hat{R}: t_1 = t_2 \rightarrow R t_1 = R t_2$ для термов s_0 сортов и $\hat{D}: A \wedge B \rightarrow \hat{D} A \wedge \hat{D} A, \hat{R}: A \wedge B \rightarrow \hat{R} A \wedge \hat{R} A$ для формул с конъюнкциями.

Определим действие операции θ через операцию λ . Для этого цепочку из двух перемножаемых гребней переводим операцией $\hat{D}$ в цепочку из сортов s_1 и применяем операцию θ .

$$\begin{aligned} a_u'^{(1)} &= C'^{(1)} u'^{(1)} \wedge a_u'^{(2)} = C'^{(2)} u'^{(2)} \wedge u'^{(1)} = u'^{(2)} \wedge a_u'^{(2)} = a_1^{(1)} \wedge \\ & \wedge a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_1^{(2)} = C^{(2)} x_1^{(2)} \wedge x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \wedge a_1^{(2)} = a_w'^{(1)} \wedge \\ & \wedge a_w'^{(1)} = C'^{(1)} w'^{(1)} \wedge a_w'^{(2)} = C'^{(2)} w'^{(2)} \wedge w'^{(1)} = w'^{(2)} \wedge a_w'^{(2)} = a_2^{(1)} \wedge \\ & \wedge a_2^{(1)} = C^{(1)} x_2^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)} \wedge x_2^{(1)} = x_2^{(2)} \wedge a_2^{(2)} = a_v'^{(1)} \wedge \\ & \wedge a_v'^{(1)} = C'^{(1)} v'^{(1)} \wedge a_v'^{(2)} = C'^{(2)} v'^{(2)} \wedge v'^{(1)} = v'^{(2)}. \end{aligned}$$

Применяем операцию $\hat{D}$, имеем

$$\begin{aligned}
b_p'^{(2)} &= G^{(2)} p'^{(2)} \wedge b_p'^{(1)} = G^{(1)} p'^{(1)} \wedge p'^{(2)} = p'^{(1)} \wedge b_p'^{(1)} = b_1^{(2)} \wedge \\
&\wedge b_1^{(2)} = G^{(2)} y_1^{(2)} \wedge b_1^{(1)} = G^{(1)} y_1^{(1)} \wedge y_1^{(2)} = y_1^{(1)} \wedge b_1^{(1)} = b_q'^{(2)} \wedge \\
&\wedge b_q'^{(2)} = G^{(2)} q'^{(2)} \wedge b_q'^{(1)} = G^{(1)} q'^{(1)} \wedge q'^{(2)} = q'^{(1)} \wedge b_q'^{(1)} = b_2^{(2)} \wedge \\
&\wedge b_2^{(2)} = G^{(2)} y_2^{(2)} \wedge b_2^{(1)} = G^{(1)} y_2^{(1)} \wedge y_2^{(2)} = y_2^{(1)} \wedge b_2^{(1)} = b_r'^{(2)} \wedge \\
&\wedge b_r'^{(2)} = G^{(2)} r'^{(2)} \wedge b_r'^{(1)} = G^{(1)} r'^{(1)} \wedge r'^{(2)} = r'^{(1)}.
\end{aligned}$$

Пользуясь коммутативностью и ассоциативностью конъюнкции переместим равенства в тот порядок, который требуется для применения операции θ .

$$\begin{aligned}
b_r'^{(1)} &= G^{(1)} r'^{(1)} \wedge b_r'^{(2)} = G^{(2)} r'^{(2)} \wedge r'^{(1)} = r'^{(2)} \\
&\wedge b_r'^{(2)} = b_2^{(1)} \wedge b_2^{(1)} = G^{(1)} y_2^{(1)} \wedge b_2^{(2)} = G^{(2)} y_2^{(2)} \wedge y_2^{(1)} = y_2^{(2)} \wedge \\
&\wedge b_2^{(2)} = b_q'^{(1)} \wedge b_q'^{(1)} = G^{(1)} q'^{(1)} \wedge b_q'^{(2)} = G^{(2)} q'^{(2)} \wedge q'^{(1)} = q'^{(2)} \wedge \\
&\wedge b_q'^{(2)} = b_1^{(1)} \wedge b_1^{(1)} = G^{(1)} y_1^{(1)} \wedge b_1^{(2)} = G^{(2)} y_1^{(2)} \wedge y_1^{(1)} = y_1^{(2)} \wedge \\
&\wedge b_1^{(2)} = b_p'^{(1)} \wedge b_p'^{(1)} = G^{(1)} p'^{(1)} \wedge b_p'^{(2)} = G^{(2)} p'^{(2)} \wedge p'^{(1)} = p'^{(2)}.
\end{aligned}$$

Итак, имеем цепочку $\theta r' y_2 q' y_1 p'$, полученную из цепочки $\lambda u' x_1 w' x_2 v'$ или окончательно (при условиях $Du^{(i)} \rightarrow p^{(j)}, Dw^{(i)} \rightarrow q^{(j)}, Dv^{(i)} \rightarrow r^{(j)}, i \neq j, i, j = 1, 2$) имеем

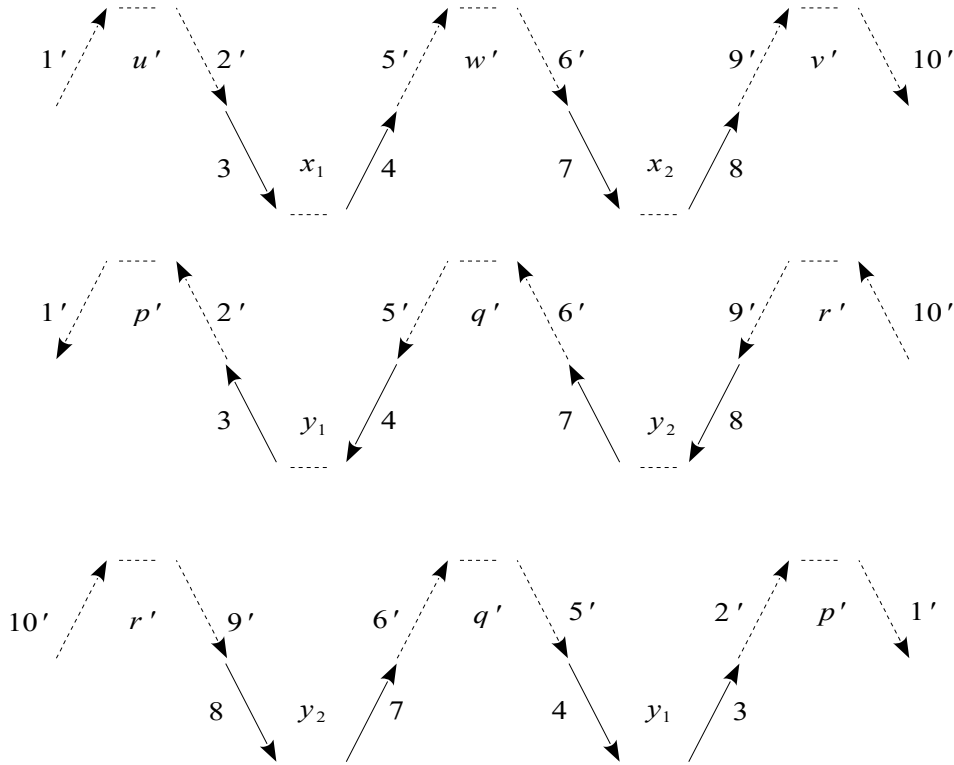
$$\theta r' y_1 q' y_2 p' = D \lambda u' x_2 w' x_1 v'.$$

Для операции σ отсюда имеем выражение через операцию ρ

$$\sigma r y'_1 q y'_2 p = D \rho u x'_2 w x'_1 v.$$

Для операции ν имеем выражение через μ операцию $\nu r y_1 q y_2 p = D \mu u x_2 w x_1 v$.

Приведём наглядную схему выкладок для вычисления θ через λ .



Из первой схемы вторая получается операцией D , примененной к каждому элементу первой схемы, третья схема является приведением записи второй схемы для возможного проведения конструктивной операции умножения $\vee$.

Определение

Формулы, полученные с помощью набора операций $\hat{D}$, назовем **дуальными по сортам** к исходным формулам. Возникающую при действии $\hat{D}$ категорную склейку назовём **дуальной по сортам** к исходной направленной бинарной склейке.

Частным случаем приведённого построения является формализация примера контравариантного функтора в теории категорий. Накладывая те или иные условия на функциональные буквы, аналогичные D , мы получаем формализацию понятия функтора для категорных склеек (здесь направленных бинарных склеек).

Таким образом, мы задали конструктивные операции перехода от категорной склейки к дуальной по сортам категорной склейке (в нашем случае для направленных бинарных склеек).

7. Свёрточная дуальность

Этот вид дуальности открыт автором и оказался полезным в теории мультикатегорий, свёрточный вариант которых адекватно моделирует искусственные нейронные сети произвольной топологии [7, 8].

Введём, как и в предыдущем разделе, копию в тех же обозначениях формального языка для дуальной по свёрткам склейки. Как и ранее определена конструктивная операция R и ее обратная R^* , переводящая символы и выражения исходного языка в его копию и наоборот.

Построим для заданной склейки дуальную по свёрткам склейку, добавив следующий набор $B = \{B^0, B', \bar{B}, \bar{B}', \dots\}$ конструктивных операций (и набор B^* им обратных), применяемых после построения гребня или свёртки исходной склейки (используемую копию исходной склейки назовём B -копией):

$$\begin{aligned} B^0: a_k^{(i)} \rightarrow b_k^{(i)}; B^0: x_k^{(i)} \rightarrow y_k^{(i)}; \quad B': a_k'^{(i)} \rightarrow b_k^{(i)}; B': x_k'^{(i)} \rightarrow y_k^{(i)}; \\ \bar{B}: \bar{a}_k^{(i)} \rightarrow \bar{b}_k^{(i)}; \bar{B}: \bar{x}_k^{(i)} \rightarrow \bar{y}_k^{(i)}; \quad \bar{B}': \bar{a}_k'^{(i)} \rightarrow \bar{b}_k^{(i)}; \bar{B}': \bar{x}_k'^{(i)} \rightarrow \bar{y}_k^{(i)}; \end{aligned}$$

выражения для B^* (с заменой букв a на b и x на y);

далее (не указываем компоненты набора B), $B(t=s) \rightarrow (Bt=Bs)$, $B^*(Bt=Bs) \rightarrow (t=s)$, t , s - термы.

При построении, чтобы не выйти из B -копии формальной склейки, необходимо согласовать набор операций B с имеющимися в склейке и её копии функциональными буквами.

$$\begin{aligned} \text{Для} \quad & \text{проекций} \quad & \text{имеем} \quad & (a^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)}, \\ B a^{(1)} = B C^{(1)} x^{(1)}, B a^{(1)} = B C^{(1)} B^- B x^{(1)}, b'^{(1)} = B C^{(1)} B^- y'^{(1)}, G'^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} B C^{(1)} B^- & \text{и т.д.)} \\ G'^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} B C^{(1)} B^-, G'^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} B C^{(2)} B^-, G^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} B C'^{(1)} B^-, G^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} B C'^{(2)} B^-, \\ \bar{G}'^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} B \bar{C}^{(1)} B^-, \bar{G}'^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} B \bar{C}^{(2)} B^-, \bar{G}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} B \bar{C}'^{(1)} B^-, \bar{G}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} B \bar{C}'^{(2)} B^-. \end{aligned}$$

Для согласования функциональных символов ξ_{ij} и η_{ij} удобно использовать в обозначениях целые индексы от 1 до 8. Рассмотрим четыре случая, первый из которых отвечает выбору индексов $i, j \in \{1, 2, 5, 6\}$. Для $x^{(i)} = \xi_{ij} x^{(j)}$ имеем

$$B x^{(i)} = B \xi_{ij} B^- B x^{(j)}; y^{(i+2)} = B \xi_{ij} B^- y^{(j+2)}; y^{(i+2)} = \eta_{i+2, j+2} y^{(j+2)}; \eta_{i+2, j+2} = B \xi_{ij} B^-.$$

Аналогично для остальных случаев.

При $i \in \{1, 2, 5, 6\}$, $j \in \{3, 4, 7, 8\}$ получаем $\eta_{i+2, j-2} = B \xi_{ij} B^-$.

При $j \in \{1, 2, 5, 6\}$, $i \in \{3, 4, 7, 8\}$ получаем $\eta_{i-2, j+2} = B \xi_{ij} B^-$.

При $i, j \in \{3, 4, 7, 8\}$ получаем $\eta_{i-2, j-2} = B \xi_{ij} B^-$.

Дополняем, как и в предыдущем случае, конструктивные операции B и R до операций $\hat{B}$ и $\hat{R}$, включающих преобразования $\hat{B}: t_1 = t_2 \rightarrow B t_1 = B t_2, \hat{R}: t_1 = t_2 \rightarrow R t_1 = R t_2$ для термов s_0 сортов и $\hat{B}: A \wedge H \rightarrow \hat{B} A \wedge \hat{B} H, \hat{R}: A \wedge H \rightarrow \hat{R} A \wedge \hat{R} H$ для формул с конъюнкциями.

Операция перевода исходных формул сортов s_0 в формулы сортов s_1 B -копии склейки состоит в **одновременном** применении всего набора операций из $\hat{B}$.

Отметим, что в исходной склейке свёртками являются не отдельные связные гребни соответствующих сортов, а их тройки, в то время как определены с помощью операций ξ_{ij} отдельные связные гребни свёрточных сортов. Удобно **свёртками** считать любые элементы B -копии склейки, а в **свёрточных операциях** считать используемыми лишь фиксированные наборы свёрток.

Переход от гребней к свёрткам (и обратно) в самой склейке - обозначим соответствующую конструктивную операцию через ξ (ξ^- - обозначение для обратной операции) - определён с помощью операций $\xi_{ij}: \xi_{31}, \xi_{42}, \xi_{75}, \xi_{86}(\xi_{13}, \xi_{24}, \xi_{57}, \xi_{68})$, именно,

$$\begin{aligned} \xi x \rightarrow x', \xi^- x' \rightarrow x; \xi: a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_1^{(2)} = C^{(2)} x_1^{(2)} \wedge x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \rightarrow \\ \rightarrow a_1'^{(1)} = C'^{(1)} x_1'^{(1)} \wedge a_1'^{(2)} = C'^{(2)} x_1'^{(2)} \wedge x_1'^{(1)} = x_1'^{(2)}, \\ a_1'^{(1)} = \xi_{31} a_1^{(1)}, x_1'^{(1)} = \xi_{31} x_1^{(1)}, a_2'^{(2)} = \xi_{42} a_2^{(2)}, x_1'^{(2)} = \xi_{42} x_1^{(2)}, C'^{(1)} = \xi_{31} C^{(1)} \xi_{13}, \\ a_1^{(1)} = \xi_{13} a_1'^{(1)}, x_1^{(1)} = \xi_{13} x_1'^{(1)}, a_2^{(2)} = \xi_{24} a_2'^{(2)}, x_1^{(2)} = \xi_{24} x_1'^{(2)}, C^{(1)} = \xi_{13} C'^{(1)} \xi_{31}, \dots \end{aligned}$$

Одновременное применение к внешним гребню и свёртке операций ξ и ξ^- обозначим через $\tilde{\xi}$, будучи дважды примененной к формуле операция ничего в ней не меняет ($\tilde{\xi}\tilde{\xi}F$ графически равно F).

Аналогичным образом вводим операцию ζ , расставляющую (и снимающую) надчеркивание, которую обозначим (ζ^- - обозначение для обратной операции «стирания» надчеркивания), одновременное применение к формуле обеих операций ξ, ξ^- обозначим через $\tilde{\xi}$. Применение дважды к формуле F и этой операции оставляет формулу неизменной: $\tilde{\xi}\tilde{\xi}F$ графически равно F . Операции ξ и ζ «коммутируют», результаты от применения $\xi\zeta$ и $\zeta\xi$ совпадают.

Отметим, что при определении произведений введённые операции фактически используются (в операциях M_b и M с другими индексами), воздействуя на формулы с равенствами проекций.

Зададим тернарное произведение ρ гребней x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_1^{(2)} = C^{(2)} x_1^{(2)} \wedge x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \\ a_2^{(1)} = C^{(1)} x_2^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)} \wedge x_2^{(1)} = x_2^{(2)} \\ a_3^{(1)} = C^{(1)} x_3^{(1)} \wedge a_3^{(2)} = C^{(2)} x_3^{(2)} \wedge x_3^{(1)} = x_3^{(2)} \end{aligned}$$

с помощью свёртки из двух гребней свёрток u', v'

$$\begin{aligned} a_u'^{(1)} = C'^{(1)} u'^{(1)} \wedge a_u'^{(2)} = C'^{(2)} u'^{(2)} \wedge u'^{(1)} = u'^{(2)} \wedge a_u'^{(1)} = a_1'^{(2)} \wedge a_u'^{(2)} = a_2'^{(1)} \wedge \\ \wedge a_v'^{(1)} = C'^{(1)} v'^{(1)} \wedge a_v'^{(2)} = C'^{(2)} v'^{(2)} \wedge v'^{(1)} = v'^{(2)} \wedge a_v'^{(2)} = a_3'^{(1)}. \end{aligned}$$

В качестве внешнего гребня получим гребень x

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} = C^{(1)} \rho^{(1)} x_1^{(1)} u'^{(1)} x_2^{(1)} v'^{(1)} x_3^{(1)} \wedge a_3^{(2)} = C^{(2)} \rho^{(2)} x_1^{(2)} u'^{(2)} x_2^{(2)} v'^{(2)} x_3^{(2)}, \\ \rho^{(1)} x_1^{(1)} u'^{(1)} x_2^{(1)} v'^{(1)} x_3^{(1)} = \rho^{(2)} x_1^{(2)} u'^{(2)} x_2^{(2)} v'^{(2)} x_3^{(2)} \end{aligned}$$

Итак, $x = \rho x_1 u' x_2 v' x_3$.

Теперь с помощью ρ определим тернарное произведение ρ_T отдельных связных свёрток

$$\begin{aligned} \xi x = x', x' = \xi \rho x_1 u' x_2 v' x_3, x' = \xi \rho \xi^- x'_1 \xi u \xi^- x'_2 \xi v \xi^- x'_3, \\ x' = \xi \rho \xi_I x'_1 \xi_{II} u \xi_{III} x'_2 \xi_{IV} v, \xi_V x'_3, x' = \xi \rho \xi_I \xi_{II} \xi_{III} \xi_{IV} \xi_V^- x'_1 u x'_2 v x'_3, \\ \rho_T = \xi \rho \xi_I \xi_{II} \xi_{III} \xi_{IV} \xi_V. \end{aligned}$$

Имеем $x' = \rho_T x'_1 u x'_2 v x'_3 = \xi \rho x_1 u' x_2 v' x_3$.

Итак, для вычисления тернарного произведения свёрток достаточно перевести их в гребни, для трёх гребней вычислить произведение и перейти от результата к соответствующей свёртке.

Отметим, что $x = \xi^- x' = \xi^- \rho_T x'_1 u x'_2 v x'_3$ есть бинарное произведение гребней u, v , которым мы пользовались, а $x' = \xi \rho x'_1 u' x'_2 v' x'_3$ есть соответствующее бинарное произведение свёрток u', v' .

Рассмотрим детальнее связь тернарного и бинарного произведений гребней. Для этого проведём вычисление тернарной операции для трёх гребней u, w, v

$$\begin{aligned} a_u^{(1)} &= C^{(1)} u^{(1)} \wedge a_u^{(2)} = C^{(2)} u^{(2)} \wedge u^{(1)} = u^{(2)}, \\ a_w^{(1)} &= C^{(1)} w^{(1)} \wedge a_w^{(2)} = C^{(2)} w^{(2)} \wedge w^{(1)} = w^{(2)}, \\ a_v^{(1)} &= C^{(1)} v^{(1)} \wedge a_v^{(2)} = C^{(2)} v^{(2)} \wedge v^{(1)} = v^{(2)} \end{aligned}$$

и двух свёрток

$$\begin{aligned} a_1'^{(1)} &= C'^{(1)} x_1'^{(1)} \wedge a_1'^{(2)} = C'^{(2)} x_1'^{(2)} \wedge x_1'^{(1)} = x_1'^{(2)} \wedge a_1'^{(1)} = a_u^{(2)} \wedge a_1'^{(2)} = a_w^{(1)} \wedge \\ &\wedge a_2'^{(1)} = C'^{(1)} x_2'^{(1)} \wedge a_2'^{(2)} = C'^{(2)} x_2'^{(2)} \wedge x_2'^{(1)} = x_2'^{(2)} \wedge a_2'^{(1)} = a_w^{(2)} \wedge a_2'^{(2)} = a_v^{(1)}. \end{aligned}$$

После проведения операции M_b и операции M_l получаем

$a_u^{(1)} = C^{(1)} u^{(1)} \quad a_v^{(2)} = C^{(2)} v^{(2)}$		$\emptyset$
$\bar{a}_1^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_1^{(1)} \wedge \bar{a}_1^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_1^{(2)} \wedge \bar{a}_2^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{x}_2^{(1)} \wedge \bar{a}_2^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{x}_2^{(2)} \quad \bar{a}_u^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{u}^{(2)} \quad \bar{a}_v^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{v}^{(1)}$		$\emptyset$
$\bar{a}_w^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \bar{w}^{(1)} \wedge \bar{a}_w^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \bar{w}^{(2)}$		

Это в точности тот же результат, что и при вычислении бинарного произведения с операцией μ выше. Применение операции $E\nu$ теперь даёт

$$\rho u x'_1 w x'_2 v = \lambda u' x_1 w' x_2 v'.$$

Применим ξ к этой формуле получим

$$\xi x = x' = \xi \rho u x'_1 w x'_2 v = \xi \lambda u' x_1 w' x_2 v',$$

что даёт, соответственно, бинарную и тернарную операции умножения для свёрток, итак, бинарная операция для гребней переходит в тернарную операцию для свёрток, а тернарная операция для гребней переходит в бинарную операцию для свёрток.

Вернёмся к дуальной по свёрткам склейке.

Операции из $\hat{B}$ переводят свёртку во внешний гребень дуальной склейки, а гребень в свёртку. Конструктивные операции, составляющие процедуру выполнения свёртки для бинарной λ и тернарной операций ρ остаются теми же. Как и в предыдущем случае сортовой дуальности, определим действие бинарной и тернарной операций в B -копии, которые обозначим соответственно ν и σ через операции λ и ρ .

Посмотрим, куда перейдет бинарная операция μ , результат x ее выполнения переходит в Bx . Применяем операцию $\hat{B}$ к гребню

$$\begin{aligned} a'_u &= C^{(1)} u'^{(1)} \wedge a'_u = C^{(2)} u'^{(2)} \wedge u'^{(1)} = u'^{(2)} \wedge a'_u = a_1^{(1)} \wedge \\ &\wedge a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge a_1^{(2)} = C^{(2)} x_1^{(2)} \wedge x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \wedge a_1^{(2)} = a'_w \wedge \\ \wedge a'_w &= C^{(1)} w'^{(1)} \wedge a'_w = C^{(2)} w'^{(2)} \wedge w'^{(1)} = w'^{(2)} \wedge a'_w = a_2^{(1)} \wedge \\ &\wedge a_2^{(1)} = C^{(1)} x_2^{(1)} \wedge a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)} \wedge x_2^{(1)} = x_2^{(2)} \wedge a_2^{(2)} = a'_v \wedge \\ &\wedge a'_v = C^{(1)} v'^{(1)} \wedge a'_v = C^{(2)} v'^{(2)} \wedge v'^{(1)} = v'^{(2)}. \end{aligned}$$

Применяем операцию $\hat{B}$, имеем

$$\begin{aligned} b_p^{(1)} &= G^{(1)} p'^{(1)} \wedge b_p^{(2)} = G^{(2)} p'^{(2)} \wedge p'^{(1)} = p'^{(2)} \wedge b_p^{(2)} = b_1^{(1)} \wedge \\ \wedge b_1^{(1)} &= G^{(1)} y_1'^{(1)} \wedge b_1^{(2)} = G^{(2)} y_1'^{(2)} \wedge y_1'^{(1)} = y_1'^{(2)} \wedge b_1^{(2)} = b_q^{(1)} \wedge \\ &\wedge b_q^{(1)} = G^{(1)} q'^{(1)} \wedge b_q^{(2)} = G^{(2)} q'^{(2)} \wedge q'^{(1)} = q'^{(2)} \wedge b_q^{(2)} = b_2^{(1)} \wedge \\ \wedge b_2^{(1)} &= G^{(1)} y_2'^{(1)} \wedge b_2^{(2)} = G^{(2)} y_2'^{(2)} \wedge y_2'^{(1)} = y_2'^{(2)} \wedge b_2^{(2)} = b_r^{(1)} \wedge \\ &\wedge b_r^{(1)} = G^{(1)} r'^{(1)} \wedge b_r^{(2)} = G^{(2)} r'^{(2)} \wedge r'^{(1)} = r'^{(2)}. \end{aligned}$$

Поскольку операции в склейке и B -копии те же самые, то выполняя их для последнего гребня B -копии склейки приходим к результату

$$\hat{B}x = \hat{B}\lambda u'x_1w'x_2v', y' = \hat{B}\lambda u'x_1w'x_2v', \hat{B}\lambda u'x_1w'x_2v' = \sigma p y'_1 q y'_2 r$$

при $\hat{B}x = y', \hat{B}u' = p, \hat{B}x_1 = y'_1, \hat{B}w' = q, \hat{B}x_2 = y'_2, \hat{B}v' = r$.

Итак, $\hat{B}\lambda u'x_1w'x_2v' = \sigma p y'_1 q y'_2 r$, откуда

$$\begin{aligned} \sigma p y'_1 q y'_2 r &= \hat{B}\lambda u'x_1w'x_2v' = \hat{B}\lambda \hat{B}p \hat{B}y'_1 \hat{B}q \hat{B}y'_2 \hat{B}r \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{B}\lambda \hat{B}_I \hat{B}_{II} \hat{B}_{III} \hat{B}_{IV} \hat{B}_V p y'_1 q y'_2 r. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление тернарного произведения гребней p, q, r сведено к вычислению бинарного произведения x_1 и x_2 .

Аналогичным образом получаем

$$\nu p' y_1 q' y_2 r' \stackrel{\text{def}}{=} \hat{B}\rho \hat{B}_I \hat{B}_{II} \hat{B}_{III} \hat{B}_{IV} \hat{B}_V p' y_1 q' y_2 r',$$

то есть вычисление бинарного произведения в B -копии склейки сведено к вычислению тернарного произведения исходной склейки.

Определение

Формулы, полученные с помощью набора операций $\hat{B}$, назовём **дуальными по свёрткам** к исходным формулам. Возникающую при действии $\hat{B}$ категорную склейку назовём **дуальной по свёрткам** к исходной направленной бинарной склейке.

Таким образом, конструктивная часть построения дуальной по свёрткам склейки получена.

Кроме введённых вариантов двойственности D и B можно построить новые двойственности, применив операции D и B несколько раз. Некоторые свойства этих двойственностей рассмотрены далее при введении логики в язык.

8. Категорный принцип двойственности

До данного раздела изложение велось в рамках общесистемной конструктивности [1], обсуждались лишь различные конструктивные операции, с помощью которых строились конструктивные объекты. Тем не менее, введённые операции понадобятся при доказательстве теорем. В используемом языке не вводились высказывания и, соответственно, понятие истинности высказываний. Здесь мы погрузим формальные построения в первопорядковый язык интуиционистской и классической логик, оставаясь в рамках теории доказательств и сделав некоторые замечания о других логиках, в которых будет выполняться обсуждаемый категорный принцип двойственности, аналогичный обычному принципу двойственности в теории категорий.

Для определённости будем опираться в том числе и в многосортном случае на терминологию из [9] и формулировки (аксиомы, правила вывода и так далее) исчисления предикатов СРС и НРС (РС обозначает случай, когда имеются в виду и СРС, и НРС), соответственно, в классической и интуиционистской логике, выписанные в книге [9] (см. стр. 19-20 и другие). Мы используем СРС и понятия теории множеств, но без обсуждения возможных интерпретаций формального языка в множествах. Далее, мы рассмотрим некоторые вопросы теории категорных склеек для случая интуиционистской и некоторых других логик.

Построенный язык можно рассматривать как часть логико-математического языка Ω (о языке Ω см. для определенности [9]) исчисления предикатов с равенством, связками, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, кванторами $\forall$, $\exists$ и некоторыми нелогическими аксиомами. Для этого переменные, функциональные символы и равенство, а также знак конъюнкции отождествляем с соответствующими элементами языка Ω .

Предложение

Введённые выше формулы полных гребней и их проекций, использующие символы равенства и конъюнкции, являются правильно построенными формулами языка Ω .

Предложение

$$\forall a_k^{(i)} \forall x_m^{(j)} (a_k^{(i)} = x_m^{(j)} \supset a_k^{(i)} = a_m^{(j)})$$

Приведём для примера простое доказательство (дерево вывода, сорта не указаны) в РС этого утверждения, используя подходящие аксиомы и допустимые правила вывода

$$\begin{array}{c}
 a_k = x_m \quad a_k = C x_k \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 C x_k = x_m \\
 | \\
 C C x_k = C x_m \quad C C t = C t(t\text{-терм}) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 C x_k = C x_m \quad a_l = C x_l \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a_k = a_m \\
 a_k = x_m \vdash a_k = a_m \\
 \vdash a_k = x_m \supset a_k = a_m
 \end{array}$$

Это предложение позволяет в полных гребнях оставить только равенства между проекциями и равенства между переменными (термами).

Не указывая сорта, выпишем условие ассоциативности для операции μ , для бинарной операции λ в формуле следует указать в соответствующих местах штрихи (см. рис. 2)

$$\mu u_{12,3} \mu u_{12} x_1 w_2 x_2 v_{12} w_{12,3} x_3 v_{12,3} = \mu u_{1,23} x_1 w_{1,23} \mu u_{23} x_2 w_{23} x_3 v_{23} v_{1,23}$$

Рассмотрим простой пример склейки, порождаемой заданной категорией предпорядка. Для склейки, порождаемой произвольной категорией, стрелка с именем x_i сопоставляется гребню $a_i^{(1)} = C^{(1)} x_i^{(1)} \wedge a_i^{(2)} = C^{(2)} x_i^{(2)} \wedge x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$, начало стрелки сопоставляется $a_i^{(1)}$, конец стрелки сопоставляется $a_i^{(2)}$. В свёртки помимо ξ_{21} -образов категорных единичных стрелок объектов могут входить ξ_{21} -образы других стрелок. Операция λ выражается через композицию в категории $x_3^{(j)} = \lambda^{(j)} u^{(j)} x_1^{(j)} w^{(j)} x_2^{(j)} v^{(j)} = u^{(j)} \circ x_1^{(j)} \circ w^{(j)} \circ x_2^{(j)} \circ v^{(j)}$, $u = \xi_{12} u'$, $w = \xi_{12} w'$, $v = \xi_{12} v'$ - стрелки категории, входящие в определение свёртки для гребней.

Предложение

Операция λ является ассоциативной по аргументам x_1 и x_2 лишь при дополнительных условиях. Для склейки, порождаемой заданной категорией предпорядка, указанные условия выписаны в доказательстве предложения.

Доказательство

Рассмотрим схему рис. 2. Каждое её ребро изображает гребень или свёртку (пунктир) произведения, μ_{12} - внешний гребень произведения x_1 на x_2 , μ_{23} - внешний гребень произведения x_2 на x_3 .

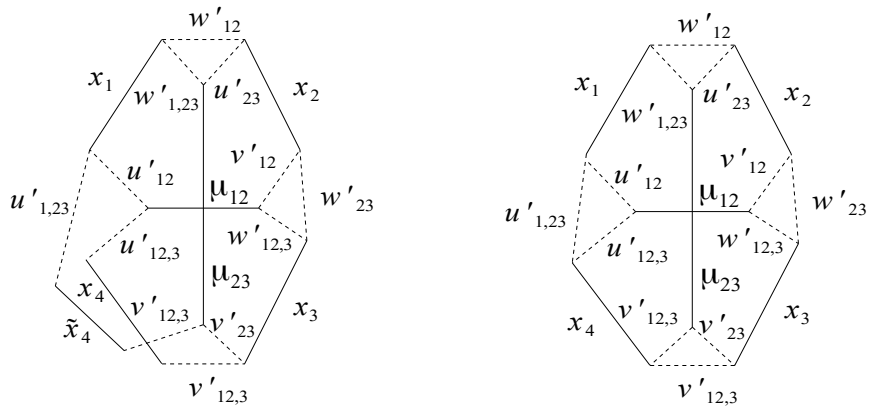


Рис. 2. Схемы для двух возможных произведений трёх гребней.

Схема предполагает (сорта не указаны), что x_4 получается двумя способами

$$\begin{aligned} x_4 &= \mu_{12,3} \mu_{12} x_1 w_{12} x_2 v_{12} w_{12,3} x_3 v_{12,3} = u_{12,3} \circ u_{12} \circ x_1 \circ w_{12} \circ x_2 \circ v_{12} \circ w_{12,3} \circ x_3 \circ v_{12,3}; \\ \tilde{x}_4 &= \mu_{1,23} \mu_{1,23} x_1 w_{1,23} \mu_{23} x_2 w_{23} x_3 v_{23} v_{1,23} = u_{1,23} \circ x_1 \circ w_{1,23} \circ u_{23} \circ x_2 \circ w_{23} \circ x_3 \circ v_{23} \circ v_{1,23}. \end{aligned}$$

Условие ассоциативности операции μ по аргументам x_1 и x_2 имеет, как видно из приведённых формул, вид

$$x_4 = \mu_{12,3} \mu_{12} x_1 w_{12} x_2 v_{12} w_{12,3} x_3 v_{12,3} = \tilde{x}_4 = \mu_{1,23} \mu_{1,23} x_1 w_{1,23} \mu_{23} x_2 w_{23} x_3 v_{23} v_{1,23}. \quad (10)$$

В категориях предпорядка стрелок между объектами не более одной, поэтому можно заключить, что

$$w_{12} = w_{1,23} \circ u_{23}; w_{23} = v_{12} \circ w_{12,3}.$$

Последних равенств для ассоциативности произведения в склейке недостаточно.

Если λ ассоциативна и μ ассоциативна по аргументам x_1 и x_2 , то из предыдущих равенств и (10) следует, что (через F обозначен одинаковый фрагмент в формулах)

$$x_4 = u_{12,3} \circ u_{12} \circ F(x_1, x_2, x_3) \circ v_{12,3} = \tilde{x}_4 = u_{1,23} \circ F(x_1, x_2, x_3) \circ v_{23} \circ v_{1,23}.$$

В категориях предпорядка эти равенства выполняются, так как ввиду единственности стрелки между объектами имеем

$$u_{1,23} = u_{12,3} \circ u_{12}; v_{12,3} = v_{23} \circ v_{1,23},$$

что согласуется с ассоциативностью произведения (см. правую схему на рис. 2).

Предложение доказано.

Последние равенства для произвольных категорий отражают наличие ограничений на операцию μ .

Гребни склейки вместе с внешним и внутренним гребнями конструктивно получаются применением операций умножения к цепочкам нерва склейки, в которые входят лишь внешние гребни и свёртки.

Определение

Категорной направленной бинарной склейкой называется множество всех полных гребней, которые можно получить из базовых гребней с помощью операций свёртки при наличии нелогических аксиом

$$(1a) \quad \begin{aligned} C_1 x_m^{(1)\text{def}} \xi_{1,2k+1} C^{(2k+1)} \xi_{2k+1,1} x_m^{(1)}, C_2 x_m^{(1)\text{def}} \xi_{1,2q} C^{(2k)} \xi_{2q,1} x_m^{(1)}, \\ \forall x_m^{(1)} C_i C_j x_m^{(1)} = C_j x_m^{(1)}, \\ \forall x_m^{(\alpha)} (\xi_{\alpha\beta} \xi_{\beta\alpha} x_m^{(\alpha)} = x_m^{(\alpha)}), \\ i, j = 1, 2, k = 0, 1, 2, 3, q = 1, 2, 3, 4, \alpha, \beta = 1, \dots, 8, m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(далее нижние индексы у переменных $x, y, \dots, w, v$ опущены)

$$(2a) \quad \begin{aligned} \forall x^{(1)} \forall y^{(1)} \forall w^{(1)} \forall u^{(1)} \forall v^{(1)} \forall x^{(2)} \forall y^{(2)} \forall w^{(2)} \forall u^{(2)} \forall v^{(2)} \\ x^{(1)} = x^{(2)} \wedge y^{(1)} = y^{(2)} \wedge w^{(1)} = w^{(2)} \wedge u^{(1)} = u^{(2)} \wedge v^{(1)} = v^{(2)} \wedge \\ \wedge \exists z^{(1)} \exists z^{(2)} (\lambda^{(1)} u^{(1)} x^{(1)} w^{(1)} y^{(1)} v^{(1)} = z^{(1)} \wedge \lambda^{(2)} u^{(2)} x^{(2)} w^{(2)} y^{(2)} v^{(2)} = z^{(2)}) \equiv \\ \equiv C^{(2)} u^{(2)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge C^{(1)} w^{(1)} = C^{(2)} x^{(2)} \wedge \\ \wedge C^{(2)} w^{(2)} = C^{(1)} y^{(1)} \wedge C^{(1)} v^{(1)} = C^{(2)} y^{(2)}, \end{aligned}$$

$$(2a') \quad \begin{aligned} \forall x^{(1)} \forall y^{(1)} \forall w^{(1)} \forall u^{(1)} \forall v^{(1)} \forall x^{(2)} \forall y^{(2)} \forall w^{(2)} \forall u^{(2)} \forall v^{(2)} \\ x^{(1)} = x^{(2)} \wedge y^{(1)} = y^{(2)} \wedge w^{(1)} = w^{(2)} \wedge u^{(1)} = u^{(2)} \wedge v^{(1)} = v^{(2)} \wedge \\ \exists z^{(1)} \exists z^{(2)} (\rho^{(1)} u^{(1)} x^{(1)} w^{(1)} y^{(1)} v^{(1)} = z^{(1)} \wedge \rho^{(2)} u^{(2)} x^{(2)} w^{(2)} y^{(2)} v^{(2)} = z^{(2)}) \equiv \\ \equiv C^{(2)} u^{(2)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge C^{(1)} w^{(1)} = C^{(2)} x^{(2)} \wedge \\ \wedge C^{(2)} w^{(2)} = C^{(1)} y^{(1)} \wedge C^{(1)} v^{(1)} = C^{(2)} y^{(2)}, \end{aligned}$$

$$(3a) \quad \begin{aligned} \forall x^{(1)} \forall y^{(1)} \forall w^{(1)} \forall u^{(1)} \forall v^{(1)} \forall x^{(2)} \forall y^{(2)} \forall w^{(2)} \forall u^{(2)} \forall v^{(2)} \forall z^{(1)} \forall z^{(2)} \\ x^{(1)} = x^{(2)} \wedge y^{(1)} = y^{(2)} \wedge w^{(1)} = w^{(2)} \wedge u^{(1)} = u^{(2)} \wedge v^{(1)} = v^{(2)} \wedge \\ \wedge (\lambda^{(1)} u^{(1)} x^{(1)} w^{(1)} y^{(1)} v^{(1)} = z^{(1)} \wedge \lambda^{(2)} u^{(2)} x^{(2)} w^{(2)} y^{(2)} v^{(2)} = z^{(2)}) \supset \\ \supset (C^{(1)} u^{(1)} = C^{(1)} z^{(1)} \wedge C^{(2)} v^{(2)} = C^{(2)} z^{(2)}) \end{aligned}$$

$$(3a') \quad \begin{aligned} \forall x^{(1)} \forall y^{(1)} \forall w^{(1)} \forall u^{(1)} \forall v^{(1)} \forall x^{(2)} \forall y^{(2)} \forall w^{(2)} \forall u^{(2)} \forall v^{(2)} \forall z^{(1)} \forall z^{(2)} \\ x^{(1)} = x^{(2)} \wedge y^{(1)} = y^{(2)} \wedge w^{(1)} = w^{(2)} \wedge u^{(1)} = u^{(2)} \wedge v^{(1)} = v^{(2)} \wedge z^{(1)} = z^{(2)} \wedge \\ \wedge (\rho^{(1)} u^{(1)} x^{(1)} w^{(1)} y^{(1)} v^{(1)} = z^{(1)} \wedge \rho^{(2)} u^{(2)} x^{(2)} w^{(2)} y^{(2)} v^{(2)} = z^{(2)}) \supset \\ \supset (C^{(1)} u^{(1)} = C^{(1)} z^{(1)} \wedge C^{(2)} v^{(2)} = C^{(2)} z^{(2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \forall x^{(1)} \forall y^{(1)} \forall w^{(1)} \forall u^{(1)} \forall v^{(1)} \forall x^{(2)} \forall y^{(2)} \forall w^{(2)} \forall u^{(2)} \forall v^{(2)} \\
& \forall x'^{(1)} \forall y'^{(1)} \forall w'^{(1)} \forall u'^{(1)} \forall v'^{(1)} \forall x'^{(2)} \forall y'^{(2)} \forall w'^{(2)} \forall u'^{(2)} \forall v'^{(2)} \\
& x^{(1)} = x^{(2)} \wedge y^{(1)} = y^{(2)} \wedge w^{(1)} = w^{(2)} \wedge u^{(1)} = u^{(2)} \wedge v^{(1)} = v^{(2)} \wedge \\
& \wedge x'^{(1)} = x'^{(2)} \wedge y'^{(1)} = y'^{(2)} \wedge w'^{(1)} = w'^{(2)} \wedge u'^{(1)} = u'^{(2)} \wedge v'^{(1)} = v'^{(2)} \wedge \\
& \wedge \lambda u^{(1)} x^{(1)} w^{(1)} y^{(1)} v^{(1)} = \rho^{(1)} u^{(1)} x^{(1)} w^{(1)} y^{(1)} v^{(1)} \wedge \\
& \wedge \lambda u'^{(2)} x'^{(2)} w'^{(2)} y'^{(2)} v'^{(2)} = \rho^{(2)} u'^{(2)} x'^{(2)} w'^{(2)} y'^{(2)} v'^{(2)} \wedge \\
& \wedge x'^{(1)} = \xi_{31} x^{(1)} \wedge y'^{(1)} = \xi_{31} y^{(1)} \wedge w'^{(1)} = \xi_{31} w^{(1)} \wedge u'^{(1)} = \xi_{31} u^{(1)} \wedge v'^{(1)} = \xi_{31} v^{(1)} \wedge \\
& \wedge x'^{(2)} = \xi_{31} x^{(2)} \wedge y'^{(2)} = \xi_{31} y^{(2)} \wedge w'^{(2)} = \xi_{31} w^{(2)} \wedge u'^{(2)} = \xi_{31} u^{(2)} \wedge v'^{(2)} = \xi_{31} v^{(2)}.
\end{aligned}
\tag{4a}$$

Ассоциативность для склеек имеет смысл для операций λ с разными параметрами. Для *ассоциативной* категорной направленной бинарной склейки имеет место дополнительная аксиома

$$\begin{aligned}
& \forall x_1^{(1)} \forall x_2^{(1)} \forall x_3^{(1)} \forall x_4^{(1)} \forall x_5^{(1)} \forall x_6^{(1)} \forall x_7^{(1)} \forall x_1^{(2)} \forall x_2^{(2)} \forall x_3^{(2)} \forall x_4^{(2)} \forall x_5^{(2)} \forall x_6^{(2)} \forall x_7^{(2)} \\
& \forall u_4'^{(1)} \forall u_5'^{(1)} \forall u_6'^{(1)} \forall u_7'^{(1)} \forall u_4'^{(2)} \forall u_5'^{(2)} \forall u_6'^{(2)} \forall u_7'^{(2)} \\
& \forall w_4'^{(1)} \forall w_5'^{(1)} \forall w_6'^{(1)} \forall w_7'^{(1)} \forall w_4'^{(2)} \forall w_5'^{(2)} \forall w_6'^{(2)} \forall w_7'^{(2)} \\
& \forall v_4'^{(1)} \forall v_5'^{(1)} \forall v_6'^{(1)} \forall v_7'^{(1)} \forall v_4'^{(2)} \forall v_5'^{(2)} \forall v_6'^{(2)} \forall v_7'^{(2)} \\
& x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \wedge x_2^{(1)} = x_2^{(2)} \wedge x_3^{(1)} = x_3^{(2)} \wedge x_4^{(1)} = x_4^{(2)} \wedge x_5^{(1)} = x_5^{(2)} \wedge x_6^{(1)} = x_6^{(2)} \wedge x_7^{(1)} = x_7^{(2)} \wedge \\
& \wedge u_4'^{(1)} = u_4'^{(2)} \wedge v_4'^{(1)} = v_4'^{(2)} \wedge w_4'^{(1)} = w_4'^{(2)} \wedge u_5'^{(1)} = u_5'^{(2)} \wedge v_5'^{(1)} = v_5'^{(2)} \wedge w_5'^{(1)} = w_5'^{(2)} \wedge \\
& \wedge u_6'^{(1)} = u_6'^{(2)} \wedge v_6'^{(1)} = v_6'^{(2)} \wedge w_6'^{(1)} = w_6'^{(2)} \wedge u_7'^{(1)} = u_7'^{(2)} \wedge v_7'^{(1)} = v_7'^{(2)} \wedge w_7'^{(1)} = w_7'^{(2)} \wedge \\
& \wedge x_4^{(1)} = \lambda^{(1)} u_4'^{(1)} x_1^{(1)} w_4'^{(1)} x_2^{(1)} v_4'^{(1)} \wedge x_4^{(2)} = \lambda^{(2)} u_4'^{(2)} x_1^{(2)} w_4'^{(2)} x_2^{(2)} v_4'^{(2)} \wedge \\
& \wedge x_5^{(1)} = \lambda^{(1)} u_5'^{(1)} x_2^{(1)} w_5'^{(1)} x_3^{(1)} v_5'^{(1)} \wedge x_5^{(2)} = \lambda^{(2)} u_5'^{(2)} x_2^{(2)} w_5'^{(2)} x_3^{(2)} v_5'^{(2)} \wedge \\
& \wedge x_6^{(1)} = \lambda^{(1)} u_6'^{(1)} x_1^{(1)} w_6'^{(1)} x_5^{(1)} v_6'^{(1)} \wedge x_6^{(2)} = \lambda^{(2)} u_6'^{(2)} x_1^{(2)} w_6'^{(2)} x_5^{(2)} v_6'^{(2)} \wedge \\
& \wedge x_7^{(1)} = \lambda^{(1)} u_7'^{(1)} x_1^{(1)} w_7'^{(1)} x_2^{(1)} v_7'^{(1)} \wedge x_7^{(2)} = \lambda^{(2)} u_7'^{(2)} x_1^{(2)} w_7'^{(2)} x_2^{(2)} v_7'^{(2)} \supset \\
& \supset x_6^{(1)} = x_7^{(1)} \wedge x_6^{(2)} = x_7^{(2)}.
\end{aligned}
\tag{5a}$$

Не указывая сортов, (5a) можно записать через операцию λ (кванторы всеобщности подразумеваются)

$$\lambda u_7' \lambda u_4' x_1 w_4' x_2 v_4' w_7' x_3 v_7' = \lambda u_6' x_1 w_6' \lambda u_5' x_2 w_5' x_3 v_5' v_6'.$$

Применяя операцию $\hat{R}$ к (1a-5a) мы получаем необходимые аксиомы для объединенного исходного языка с его R -копией.

В [6], где задан язык первого порядка в рамках СРС для теории категорий, под категорией понимается теоретико-множественная модель языка, в то время как формальный язык задаёт понятие абстрактной категории, аналогично в [5] используется термин метакатегории, вместе с терминами стрелка, композиция, единица и так далее. Мы не рассматриваем

моделей, вводимые понятия относятся к формальной теории, как и в [5-6] для случая абстрактных категорий и метакатегорий.

Теорема

Категория является частным случаем направленной бинарной категорной склейки.

Для несложного доказательства (которое мы не приводим из-за громоздкости) достаточно в ассоциативной склейке выбрать подходящие частные случаи свёрток, считать проекции единичными стрелками, а также указать перевод многосортного языка в односортный язык теории категорий (например, из [6]).

В самой категории через обычное умножение стрелок можно, перенося отдельные стрелки в свёртки, получать ряд примеров бинарных направленных склеек, порождаемых категорией.

Принцип двойственности касается двойственных понятий в категориях. Аналогичные понятия имеются в категорных склейках. Функтор двойственности меняет местами входы и выходы, а также места вхождений в операцию свёртки сомножителей.

Определим начальные и конечные объекты в склейках, дающие простой, но важный пример двойственных понятий, которым мы, заодно, проиллюстрируем сортовую двойственность.

Определение

Определим **объект** склейки как гребень с дополнительным условием

$$a^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge a^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)} \wedge a^{(1)} = x^{(1)} .$$

Началом гребня $a^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge a^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}$ называется объект

$$\alpha^{(1)} = C^{(1)} \lambda^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} \lambda^{(2)} \wedge \alpha^{(1)} = \lambda^{(1)} \wedge \alpha^{(1)} = a^{(1)} \wedge C^{(1)} x^{(1)} = a^{(1)} ,$$

концом этого гребня называется объект

$$\beta^{(1)} = C^{(1)} \sigma^{(1)} \wedge \beta^{(2)} = C^{(2)} \sigma^{(2)} \wedge \beta^{(2)} = \sigma^{(1)} \wedge \beta^{(1)} = a^{(2)} \wedge C^{(2)} x^{(2)} = a^{(2)} .$$

В силу следующего простого предложения графическое выражение для объекта имеет вид

$$\begin{array}{ccc} (x^{(1)} =) a^{(1)} = a^{(2)} (= x^{(2)}) & & \\ C^{(1)} \left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right) C^{(2)} & \text{или в сокращении} & \boxed{ \begin{array}{c} a^{(1)} = a^{(2)} \\ \left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right) \\ x^{(1)} = x^{(2)} \end{array} } \end{array}$$

Предложение

$$a^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge a^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)} \wedge x^{(1)} = x^{(2)} , x^{(1)} = a^{(1)} \mid - a^{(1)} = a^{(2)} .$$

Действительно, имеем следующий вывод (переменные переходов между сортами не указаны) для предложения,

$$\begin{array}{c}
 a^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge a^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)} \wedge x^{(1)} = x^{(2)} \quad a^{(1)} = x^{(1)} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad a^{(1)} = x^{(2)} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad C^{(2)} a^{(1)} = C^{(2)} x^{(2)} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad C^{(2)} C^{(1)} x^{(1)} = C^{(2)} x^{(2)} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad C^{(1)} x^{(1)} = C^{(2)} x^{(2)} \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad C^{(1)} x^{(1)} = C^{(2)} x^{(2)}
 \end{array}$$

что доказывает предложение.

Определение

Начальный объект α для склеек $\alpha^{(1)} = C^{(1)} u^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} u^{(2)} \wedge \alpha^{(1)} = u^{(1)}$ определяется условием

$$\forall a^{(2)} \exists ! x^{(1)} \exists ! x^{(2)} (\alpha^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge a^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) .$$

Конечный объект β для склеек $\beta^{(1)} = C^{(1)} v^{(1)} \wedge \beta^{(2)} = C^{(2)} v^{(2)} \wedge \beta^{(1)} = v^{(1)}$ определяется условием

$$\forall a^{(1)} \exists ! x^{(1)} \exists ! x^{(2)} (a^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge \beta^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) .$$

Определение закончено.

В определении не фигурируют операции умножения гребней, оно имеет смысл независимо от операций.

Как и в теории категорий один объект может иметь несколько одновременно исходящих и входящих в этот объект гребней. Интуитивно очевидно, что начальный и конечный объекты имеют всего один такой гребень. Строго говоря, это утверждение требует формального доказательства, которое будет давать также обоснование согласованности определений этих объектов.

Предложение

$$\begin{array}{l}
 \forall a^{(2)} \exists ! x^{(1)} \exists ! x^{(2)} (\alpha^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge a^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) \vdash \\
 \vdash \exists x^{(1)} \exists x^{(2)} (x^{(1)} = id^{(1)} \wedge x^{(2)} = id^{(2)})
 \end{array}$$

Доказательство даётся следующим выводом (через id обозначен объект α).

$$\begin{aligned}
& \forall a^{(2)} \exists! x^{(1)} \exists! x^{(2)} (\alpha^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge a^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) \supset \\
& \supset \exists! x^{(1)} \exists! x^{(2)} (\alpha^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) \\
& \forall a^{(2)} \exists! x^{(1)} \exists! x^{(2)} (\alpha^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge a^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) \\
& \quad \swarrow \quad \searrow \\
& \exists! x^{(1)} \exists! x^{(2)} (\alpha^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) \\
& \quad \downarrow \text{def} \\
& \exists x^{(1)} \exists x^{(2)} (\alpha^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) \wedge \forall y^{(1)} \forall y^{(2)} \forall z^{(1)} \forall z^{(2)} ((\alpha^{(1)} = C^{(1)} y^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} y^{(2)}) \wedge \\
& \quad \wedge (\alpha^{(1)} = C^{(1)} z^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} z^{(2)}) \supset y^{(1)} = z^{(1)} \wedge y^{(2)} = z^{(2)}) \\
& \quad \downarrow \\
& (\alpha^{(1)} = C^{(1)} \xi^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} \xi^{(2)}) \wedge \forall y^{(1)} \forall y^{(2)} \forall z^{(1)} \forall z^{(2)} ((\alpha^{(1)} = C^{(1)} y^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} y^{(2)}) \wedge \\
& \quad \wedge (\alpha^{(1)} = C^{(1)} z^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} z^{(2)}) \supset y^{(1)} = z^{(1)} \wedge y^{(2)} = z^{(2)}) \\
& \quad \downarrow \\
& (\alpha^{(1)} = C^{(1)} \xi^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} \xi^{(2)}) \wedge \forall z^{(1)} \forall z^{(2)} ((\alpha^{(1)} = C^{(1)} \xi^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} \xi^{(2)}) \wedge \\
& \quad \wedge (\alpha^{(1)} = C^{(1)} z^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} z^{(2)}) \supset \xi^{(1)} = z^{(1)} \wedge \xi^{(2)} = z^{(2)}) \\
& \quad \downarrow \\
& (\alpha^{(1)} = C^{(1)} \xi^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} \xi^{(2)}) \wedge ((\alpha^{(1)} = C^{(1)} \xi^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} \xi^{(2)}) \wedge \\
& \quad \wedge (\alpha^{(1)} = C^{(1)} id^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} id^{(2)}) \supset \xi^{(1)} = id^{(1)} \wedge \xi^{(2)} = id^{(2)}) \\
& \quad \downarrow \\
& (\alpha^{(1)} = C^{(1)} \xi^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} \xi^{(2)}) \wedge (\alpha^{(1)} = C^{(1)} id^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} id^{(2)}) \supset \xi^{(1)} = id^{(1)} \wedge \xi^{(2)} = id^{(2)} \\
& \quad \downarrow \\
& \alpha^{(1)} = C^{(1)} id^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} id^{(2)} \quad (\alpha^{(1)} = C^{(1)} id^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} id^{(2)}) \supset \xi^{(1)} = id^{(1)} \wedge \xi^{(2)} = id^{(2)} \\
& \quad \swarrow \quad \searrow \\
& \xi^{(1)} = id^{(1)} \wedge \xi^{(2)} = id^{(2)} \\
& \quad \downarrow \\
& \exists x^{(1)} \exists x^{(2)} (x^{(1)} = id^{(1)} \wedge x^{(2)} = id^{(2)})
\end{aligned}$$

Что и требовалось.

Введём понятие изоморфизма объектов склеек.

Определение

Гребень x , имеющий α начало

$$\alpha^{(1)} = C^{(1)} \lambda^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} \lambda^{(2)} \wedge \alpha^{(1)} = \lambda^{(1)} \wedge \alpha^{(1)} = a^{(1)} \wedge C^{(1)} x^{(1)} = a^{(1)}$$

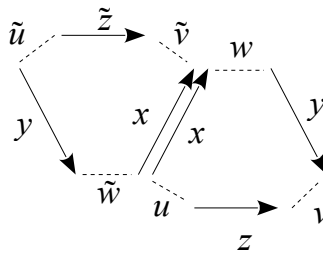
и β конец

$$\beta^{(1)} = C^{(1)} \sigma^{(1)} \wedge \beta^{(2)} = C^{(2)} \sigma^{(2)} \wedge \beta^{(1)} = \sigma^{(1)} \wedge \beta^{(1)} = a^{(2)} \wedge C^{(2)} x^{(2)} = a^{(2)} ,$$

называется **обратимым**, если существует гребень y и $w^{(i)}, u^{(i)}, v^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{u}^{(i)}, \tilde{v}^{(i)}, i=1,2$ для операции умножения, такие, что

$$\begin{aligned} & \exists y^{(1)} \exists y^{(2)} \exists z^{(1)} \exists z^{(2)} \exists \tilde{z}^{(1)} \exists \tilde{z}^{(2)} \\ & (\mu^{(1)} x^{(1)} y^{(1)} w^{(1)} u^{(1)} v^{(1)} = z^{(1)} \wedge \mu^{(2)} x^{(2)} y^{(2)} w^{(2)} u^{(2)} v^{(2)} = z^{(2)} \wedge \\ & \wedge z^{(1)} = z^{(2)} \wedge C^{(1)} z^{(1)} = \alpha^{(2)} \wedge C^{(2)} z^{(2)} = \alpha^{(1)} \wedge \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \wedge \\ & \wedge \mu^{(1)} y^{(1)} x^{(1)} \tilde{w}^{(1)} \tilde{u}^{(1)} \tilde{v}^{(1)} = \tilde{z}^{(1)} \wedge \mu^{(2)} y^{(2)} x^{(2)} \tilde{w}^{(2)} \tilde{u}^{(2)} \tilde{v}^{(2)} = \tilde{z}^{(2)} \\ & \wedge \tilde{z}^{(1)} = \tilde{z}^{(2)} \wedge C^{(1)} \tilde{z}^{(1)} = \beta^{(2)} \wedge C^{(2)} \tilde{z}^{(2)} = \beta^{(1)} \wedge \beta^{(1)} = \beta^{(2)}) \end{aligned}$$

Приведём для наглядности эту формулу частично в графических обозначениях (ср. с рис. 2)



Определение

Два объекта α и β называются **изоморфными**, если существует обратимый гребень, исходящий из α (начало гребня) и входящий в β (конец гребня).

В отличие от теории категорий начальные (конечные) гребни не всегда изоморфны друг другу.

Теорема

Два начальных объекта α и β

$$\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{c} \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \\ \left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right) \\ \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \beta^{(1)} = \beta^{(2)} \\ \left(\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right) \\ \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \end{array}} \end{array}$$

изоморфны тогда и только тогда, когда соединяющие их единственные гребни, соответственно, x и y допускают прямое и обратное произведение, исходящее и входящее, соответственно, в α и β .

Доказательство

Воспользуемся доказанным утверждением о совпадении гребня из начального объекта в тот же объект с этим объектом.

Условие теоремы выражается следующей формулой, с которой начат вывод

$$\begin{aligned}
& \exists! x^{(1)} \exists! x^{(2)} \exists! y^{(1)} \exists! y^{(2)} \exists z^{(1)} \exists z^{(2)} \exists w^{(1)} \exists u^{(1)} \exists v^{(1)} \exists w^{(2)} \exists u^{(2)} \exists v^{(2)} \\
& \exists \tilde{z}^{(1)} \exists \tilde{z}^{(2)} \exists \tilde{w}^{(1)} \exists \tilde{u}^{(1)} \exists \tilde{v}^{(1)} \exists \tilde{w}^{(2)} \exists \tilde{u}^{(2)} \exists \tilde{v}^{(2)} \\
& (\alpha^{(1)} = C^{(1)} x^{(1)} \wedge \beta^{(2)} = C^{(2)} x^{(2)}) \wedge (\beta^{(1)} = C^{(1)} y^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(2)} y^{(2)}) \wedge \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \wedge \beta^{(1)} = \beta^{(2)} \wedge \\
& \wedge (z^{(1)} = \mu^{(1)} x^{(1)} y^{(1)} w^{(1)} u^{(1)} v^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} = C^{(1)} z^{(1)} \wedge z^{(2)} = \mu^{(2)} x^{(2)} y^{(2)} w^{(2)} u^{(2)} v^{(2)} \wedge \alpha^{(1)} = C^{(2)} z^{(2)}) \wedge \\
& \wedge (\tilde{z}^{(1)} = \mu^{(1)} y^{(1)} x^{(1)} \tilde{w}^{(1)} \tilde{u}^{(1)} \tilde{v}^{(1)} \wedge \beta^{(2)} = C^{(1)} \tilde{z}^{(1)} \wedge \tilde{z}^{(2)} = \mu^{(2)} y^{(2)} x^{(2)} \tilde{w}^{(2)} \tilde{u}^{(2)} \tilde{v}^{(2)} \wedge \beta^{(1)} = C^{(2)} \tilde{z}^{(2)}) \\
& \quad \quad \quad | \\
& C^{(1)} \theta^{(1)} = \alpha^{(2)} \wedge \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \wedge C^{(2)} \theta^{(2)} = \alpha^{(1)} \wedge C^{(1)} \tilde{\theta}^{(1)} = \beta^{(2)} \wedge \beta^{(1)} = \beta^{(2)} \wedge C^{(2)} \tilde{\theta}^{(2)} = \beta^{(1)} \\
& \quad \quad \quad | \\
& \theta^{(1)} = \lambda^{(1)} \wedge \theta^{(2)} = \lambda^{(2)} \wedge \tilde{\theta}^{(1)} = \sigma^{(1)} \wedge \tilde{\theta}^{(2)} = \sigma^{(2)} \\
& \quad \quad \quad | \\
& \exists y^{(1)} \exists y^{(2)} (\mu^{(1)} x^{(1)} y^{(1)} w^{(1)} u^{(1)} v^{(1)} = \alpha^{(2)} \wedge \mu^{(2)} x^{(2)} y^{(2)} w^{(2)} u^{(2)} v^{(2)} = \alpha^{(1)} \wedge \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \wedge \\
& \wedge \mu^{(1)} y^{(1)} x^{(1)} \tilde{w}^{(1)} \tilde{u}^{(1)} \tilde{v}^{(1)} = \beta^{(2)} \wedge \mu^{(2)} y^{(2)} x^{(2)} \tilde{w}^{(2)} \tilde{u}^{(2)} \tilde{v}^{(2)} = \beta^{(1)} \wedge \beta^{(1)} = \beta^{(2)})
\end{aligned}$$

Последняя формула задаёт обратимый гребень, необходимый для изоморфизма начальных объектов. Теорема доказана.

Мы разобрали ряд примеров теории склеек, они иллюстрируют общие теоремы, касающиеся принципа двойственности, к которому мы переходим.

Стандартная ссылка (см., например, [5] и [10]) при обсуждении принципа двойственности в категориях, как на его строгое доказательство - это книга [6]. Однако, в [6] проведено доказательство принципа двойственности, опирающееся на рассмотрение моделей. Мы проведём доказательство принципа двойственности без использования интерпретаций, основываясь на введённом понятии операций двойственности по сортам D и по свёрткам B .

Расширим набор операций $\hat{D}$ (и набор операций $\hat{B}$) перевода произвольных формул A, B сортов s_0 в формулы сортов s_1 (а также $\hat{D}^-$ и $\hat{B}^-$ для A^*, B^*) дополнительными операциями

$$\begin{aligned}
& \hat{D} : A \Sigma B \rightarrow \hat{D} A \Sigma \hat{D} B, \hat{D} : \neg A \rightarrow \neg \hat{D} A \\
& \hat{D}^- : A^* \Sigma B^* \rightarrow \hat{D}^- A^* \Sigma \hat{D}^- B^*, \hat{D}^- : \neg A^* \rightarrow \neg \hat{D}^- A^*
\end{aligned}
, \Sigma \text{ любая из связок.}$$

Для кванторов также вводим свойства $\hat{D}$ и $\hat{D}^-$:

$\hat{D} : Q \xi F \rightarrow Q D \xi \hat{D} F, \hat{D}^- : Q \xi F \rightarrow Q D^- \xi \hat{D}^- F$, Q - значок любого из кванторов. Те же формулы принимаем и для наборов $\hat{B}$ и $\hat{B}^-$, а также для $\hat{R}$ и $\hat{R}^-$.

Подчеркнем, что в определение R -копии формального языка склеек входит набор тех же аксиом, только в R -обозначениях. Отметим, что дуальности по сортам и по свёрткам рассматриваются отдельно, поэтому можно использовать одну и ту же R -копию в обоих случаях.

Если склейки S и S' являются копиями друг друга, то будем писать $S \approx S'$.

Можно расширить определение дуальных по сортам и по свёрткам формул.

Определение

Пусть задана формула F исходного языка с сортами s_0 , расширенного выше до формальной аксиоматической теории первого порядка (см. [9] стр. 32), тогда формула $\hat{D}F$ (соответственно, $\hat{B}F$) называется **дуальной по сортам (по свёрткам)** для формулы F . Применяя к этой формуле операцию $\hat{R}^-$ мы получим формулу исходного языка, которую будем также называть **дуальной по сортам (по свёрткам)** формулой.

Предложение

Пусть формула исходного языка B выведена из формул A и $A \supset B$ по правилу *modus ponens*, тогда формула $\hat{D}B$ выводится по этому правилу из формул $\hat{D}A$ и $\hat{D}(A \supset B)$. Пусть теперь формула $\forall \xi A$ получена из формулы A с помощью правила Gen классической логики. Тогда формула $\hat{D}(\forall \xi A)$ выводится из формулы $\hat{D}A$ по тому же правилу.

Доказательство (и формулировки одинаковы для обеих дуальностей, мы проводим доказательство для дуальности по сортам)

(а) Формула $\hat{D}(A \supset B)$ переводится согласно свойствам $\hat{D}$ в формулу $\hat{D}A \supset \hat{D}B$, а формула $\hat{D}(\forall \xi A)$ переводится согласно свойствам $\hat{D}$ в формулу $\forall D \xi \hat{D}A$. В расширенном языке используются правила вывода классической логики, в том числе, для формул с сортами s_1 . Применяя правило *modus ponens* к $\hat{D}A$ и $\hat{D}A \supset \hat{D}B$ выводим формулу $\hat{D}B$. Применяя правило Gen к $\hat{D}A$, выводим формулу $\forall D \xi \hat{D}A$. Оба правила вывода (и только они) имеются и в интуиционистской логике, для случая которой рассуждения также проходят. Доказательство завершено.

Предложение

Если F аксиома, то дуальная ей формула $\hat{D}F$ (соответственно, $\hat{B}F$) также является аксиомой формальной аксиоматической теории с объединённым языком склеек и его R -копии.

Доказательство

Для доказательства утверждения предложения относительно первой аксиомы отмечаем последовательно следующее (i, j нечётные целые из набора от 1 до 8)

$$\begin{aligned}
C_i C_j x_k^{(1)} &= C_j x_k^{(1)}; \xi_{1i} C^{(i)} \xi_{1i} \xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)} = \xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)}; \\
D(\xi_{1i} C^{(i)} \xi_{1i} \xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)}) &= D(\xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)}); \\
\eta_{2i+1} G^{(i+1)} \eta_{i+1,2} \eta_{2j+1} G^{(j+1)} \eta_{j+1,2} y_k^{(2)} &= \eta_{2j+1} G^{(j+1)} \eta_{j+1,2} y_k^{(2)}; \\
G^{(2)} &= \eta_{21} G^{(1)} \eta_{12}, G_{j+1}^{(2)} = \eta_{2j+1} G^{(j+1)} \eta_{j+1,2}, \\
G_{i+1}^{(2)} G_{j+1}^{(2)} y_k^{(2)} &= G_{j+1}^{(2)} y_k^{(2)}, \eta_{21} G_{i+1}^{(1)} \eta_{12} \eta_{21} G_{j+1}^{(1)} \eta_{12} \eta_{21} y^{(1)} = \eta_{21} G_{j+1}^{(1)} \eta_{12} \eta_{21} y^{(1)}, \\
G_{i+1}^{(1)} G_{j+1}^{(1)} y^{(1)} &= G_{j+1}^{(1)} y^{(1)}.
\end{aligned}$$

Аналогичные выкладки дают тот же результат для второй части первой аксиомы. Для свёрточной дуальности имеем при $i, j = 1, 2, 5, 6$

$$\begin{aligned}
C_i C_j x_k^{(1)} &= C_j x_k^{(1)}; \xi_{1i} C^{(i)} \xi_{1i} \xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)} = \xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)}; \\
B(\xi_{1i} C^{(i)} \xi_{1i} \xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)}) &= B(\xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)}); \\
B \xi_{1i} B^- B C^{(i)} B^- B \xi_{1j} B^- B C^{(j)} B^- B \xi_{j1} x_k^{(1)} &= B(\xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)}); \\
\eta_{3i+2} G^{(i+2)} \eta_{i+2,3} \eta_{3j+2} G^{(j+2)} \eta_{j+2,3} y_k^{(3)} &= B(\xi_{1j} C^{(j)} \xi_{j1} x_k^{(1)}); \\
G^{(3)} G^{(3)} y_k^{(3)} &= G^{(3)} y_k^{(3)}; G_3 G_3 = G_3.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить требуемые равенства для первой аксиомы по остальным индексам, помимо 3.

Мы получили то, что требуется в предложении для нечётных чисел i, j . Аналогичные выкладки дают тот же результат для первой аксиомы.

Для второй аксиомы

$$\begin{aligned}
&\forall x_1^{(1)} \forall x_2^{(1)} \forall w'^{(1)} \forall u'^{(1)} \forall v'^{(1)} \forall x_1^{(2)} \forall x_2^{(2)} \forall w'^{(2)} \forall u'^{(2)} \forall v'^{(2)} \\
&x^{(1)} = x^{(2)} \wedge y^{(1)} = y^{(2)} \wedge w'^{(1)} = w'^{(2)} \wedge u'^{(1)} = u'^{(2)} \wedge v'^{(1)} = v'^{(2)} \wedge \\
&\wedge \exists x_3^{(1)} \exists x_3^{(2)} (\lambda^{(1)} u'^{(1)} x_1^{(1)} w'^{(1)} x_2^{(1)} v'^{(1)} = z^{(1)} \wedge \lambda^{(2)} u'^{(2)} x_1^{(2)} w'^{(2)} x_2^{(2)} v'^{(2)} = x_3^{(2)}) \equiv \\
&\equiv C'^{(2)} u'^{(2)} = C^{(1)} x_1^{(1)} \wedge C'^{(1)} w'^{(1)} = C^{(2)} x_1^{(2)} \wedge \\
&\wedge C'^{(2)} w'^{(2)} = C^{(1)} x_2^{(1)} \wedge C'^{(1)} v'^{(1)} = C^{(2)} x_2^{(2)},
\end{aligned}$$

имеем после перехода к дуальному случаю

$$\begin{aligned}
&\forall y_1^{(2)} \forall y_2^{(2)} \forall q'^{(2)} \forall p'^{(2)} \forall r'^{(2)} \forall y_1^{(1)} \forall y_2^{(1)} \forall q'^{(1)} \forall p'^{(1)} \forall r'^{(1)} \\
&y_1^{(2)} = y_1^{(1)} \wedge y_2^{(2)} = y_2^{(1)} \wedge q'^{(2)} = q'^{(1)} \wedge p'^{(2)} = p'^{(1)} \wedge r'^{(2)} = r'^{(1)} \wedge \\
&\wedge \exists y_3^{(2)} \exists y_3^{(1)} (\theta^{(2)} r'^{(2)} y_2^{(2)} q'^{(2)} y_2^{(2)} p'^{(2)} = y_3^{(2)} \wedge \theta^{(1)} r'^{(1)} y_2^{(1)} q'^{(1)} y_1^{(1)} p'^{(1)} = y_3^{(1)}) \equiv \\
&\equiv G'^{(1)} p'^{(1)} = G^{(2)} y_1^{(2)} \wedge G'^{(2)} q'^{(2)} = G^{(1)} y_1^{(1)} \wedge \\
&\wedge G'^{(1)} q'^{(1)} = G^{(2)} y_2^{(2)} \wedge G'^{(2)} r'^{(2)} = G^{(1)} y_2^{(1)}.
\end{aligned}$$

Это выражение, переписанное эквивалентным образом с переобозначениями переменных y_1 на y_2 и наоборот, p на r и наоборот

$$\begin{aligned}
&\forall y_1^{(1)} \forall y_2^{(1)} \forall q'^{(1)} \forall p'^{(1)} \forall r'^{(1)} \forall y_1^{(2)} \forall y_2^{(2)} \forall q'^{(2)} \forall p'^{(2)} \forall r'^{(2)} \\
&y_1^{(1)} = y_1^{(2)} \wedge y_2^{(1)} = y_2^{(2)} \wedge q'^{(1)} = q'^{(2)} \wedge p'^{(1)} = p'^{(2)} \wedge r'^{(1)} = r'^{(2)} \wedge \\
&\wedge \exists y_3^{(1)} \exists y_3^{(2)} (\theta^{(1)} p'^{(1)} y_1^{(1)} q'^{(1)} y_2^{(1)} r'^{(1)} = y_3^{(1)} \wedge \theta^{(2)} p'^{(2)} y_1^{(2)} q'^{(2)} y_2^{(2)} r'^{(2)} = y_3^{(2)}) \equiv \\
&\equiv G'^{(2)} p'^{(2)} = G^{(1)} y_1^{(1)} \wedge G'^{(1)} q'^{(1)} = G^{(2)} y_1^{(2)} \wedge \\
&\wedge G'^{(2)} q'^{(2)} = G^{(1)} y_2^{(1)} \wedge G'^{(1)} r'^{(1)} = G^{(2)} y_2^{(2)}.
\end{aligned}$$

есть 2-я аксиома в R-копии склейки.

При свёрточной дуальности 2-я аксиома переходит в выражение

$$\begin{aligned} & \forall y_1^{(1)} \forall y_2^{(1)} \forall q'^{(1)} \forall p'^{(1)} \forall r'^{(1)} \forall y_1^{(2)} \forall y_2^{(2)} \forall q'^{(2)} \forall p'^{(2)} \forall r'^{(2)} \\ & y_1'^{(1)} = y_1'^{(2)} \wedge y_2'^{(1)} = y_2'^{(2)} \wedge q'^{(1)} = q'^{(2)} \wedge p'^{(1)} = p'^{(2)} \wedge r'^{(1)} = r'^{(2)} \wedge \\ & \exists y_3'^{(1)} \exists y_3'^{(2)} (\rho'^{(1)} p'^{(1)} y_1'^{(1)} q'^{(1)} y_2'^{(1)} r'^{(1)} = y_3'^{(1)} \wedge \rho'^{(2)} p'^{(2)} y_1'^{(2)} q'^{(2)} y_2'^{(2)} r'^{(2)} = y_3'^{(2)}) \equiv \\ & \equiv G^{(2)} p'^{(2)} = G'^{(1)} y_1'^{(1)} \wedge G^{(1)} q'^{(1)} = G'^{(2)} y_2'^{(2)} \wedge \\ & \wedge G^{(2)} q'^{(2)} = G'^{(1)} y_2'^{(1)} \wedge G^{(1)} r'^{(1)} = G'^{(2)} y_2'^{(2)}. \end{aligned}$$

Эта формула с учетом несложного вывода (F не содержит $y_3'^{(1)}, y_3'^{(2)}$)

$$\exists y_3'^{(1)} \exists y_3'^{(2)} \rho' F \vdash \exists y_3^{(1)} \exists y_3^{(2)} \rho F$$

приводится к аксиоме (2') в R-копии склейки.

Проверка остальных аксиом также несложная, мы ее опустили. Предложение доказано.

Теорема (принцип дуальности)

Пусть формула A исходного языка бинарных склеек выводима, тогда дуальная по сортам формула $\hat{D}A$ (соответственно, дуальная по свёрткам формула $\hat{B}F$) также выводима.

Доказательство (и формулировки одинаковы для обеих дуальностей, мы проводим доказательство для дуальности по сортам)

По условию теоремы задана формула A исходного языка и её вывод из аксиом исходного языка. Сама формула является последней в дереве вывода, пусть она получена на шаге n - последнем шаге вывода, на котором использованы либо правило вывода *modus ponens*, либо правило Gen. Если применялось правило *modus ponens*, то имеются две формулы B и $B \supset A$, на основании которых получена формула A . Тогда дуальная для A формула $\hat{D}A$ на основании первого из доказанных выше предложений выводится из формул $\hat{D}B, \hat{D}B \supset \hat{D}A$ по правилу *modus ponens*. Указанный случай применения правила Gen дает тот же результат выводимости формулы $\hat{D}A$ из формулы дуальной той формуле из которой выведена в этом случае формула A . Теперь мы рассмотрим формулы, из которых выведена формула A , их вывод содержит менее, чем n шагов. Повторяя проведенный шаг мы по заданному выводу формулы A будем приходить к аксиомам исходного языка, но по второму из доказанных выше двух последних предложений мы в листьях дерева из дуальных формул получаем аксиомы. Таким образом, вывод формулы A переводится в вывод дуальной формулы $\hat{D}A$. Теорема доказана.

Следствие

Если выводима формула A в исходном языке, то ей дуальная формула в том же языке $\hat{R} \hat{D} A$ (соответственно, $\hat{R} \hat{B} A$) также выводима, ее вывод является выводом дуальной формулы $\hat{D} A$ (соответственно, $\hat{B} A$), переведённым в исходный язык операцией $\hat{R}$.

Теорема об условиях изоморфизма начальных объектов имеет ту же формулировку для конечных объектов в бинарной склейке, доказательство её есть следствие теоремы о принципе дуальности. Тем не менее, чтобы получить явное доказательство можно операцией

$\hat{D}$ построить из приведённого выше вывода доказательство дуальной формулы и потом с помощью операции $\hat{R}$ выписать искомое доказательство в исходном языке.

Выбирая очередное переименование букв языка, то есть подходящую операцию R , мы можем многократно переходить к дуальным склейкам. Однако, мы получим ограниченное число дуальностей.

Теорема

Повторное применение операций D и B даёт копию исходной склейки S ($DDS \approx S$, $BBS \approx S$), применение D и потом B даёт копию склейки, полученной применением к исходной склейке сначала B и потом D ($BDS \approx DBS$), применение D или B к склейке, полученной применением D и B , даёт копию исходной склейки ($DBDS \approx S$, $BDBS \approx S$).

Таким образом, имеется всего три различных дуальности, D , B , BD отметим, что BD -дуальность нашла применение для построения сопряженного графа нейросети в подходе С.Осовского в теории искусственных нейронных сетей [8].

Рассмотренные начальные понятия и свойства бинарных склеек остаются приемлемыми и справедливыми при замене классической логики на интуиционистскую, что нетрудно проверить, используя обсуждавшийся и цитированный выше вариант интуиционистской формальной аксиоматической системы [9], в которую вписываются конструктивные операции и аксиомы бинарных направленных склеек. Интуиционистская логика обладает важнейшими атрибутами конструктивности (доказанными, в частности, в [9]) именно,

- свойством дизъюнктивности, то есть из того, что выводимо $\phi \vee \psi$, (то есть $\vdash \phi \vee \psi$), следует, что выводимо или ϕ , или ψ (то есть $\vdash \phi$ или $\vdash \psi$);

и свойством экзистенциальности, если $\vdash \exists x \psi(x)$, то найдется терм t такой, что $\vdash \psi(t)$.

Свойства дизъюнктивности и экзистенциальности лежат в основе конструктивной логики А.А. Маркова, в рамках которой результаты для формальной теории бинарных склеек также проходят, но этот вопрос требует отдельного изложения.

9. Заключение

Мы начали статью с обсуждения системных вопросов, к которым частично вернёмся в заключении. В развиваемой автором категорной теории систем явно выделяется конструктивная часть теории исследуемого объекта. Это позволяет наметить важную для попыток построения искусственного сознания в искусственном интеллекте границу, отделяющую естественно переносимую в компьютер часть теории от остальных ее частей, требующих ментальных представлений. Подобная общесистемная конструктивность допускает развитие теории с помощью различных логик, в частности, логики, адекватной изучаемому объекту, а не просто взятой *ad hoc*, как это обычно делается, классической логикой. Данный системный принцип (то, что логику для теории определяет объект исследования), хотя и не сформулирован в [2], но само построение теории слов, осуществлённое в книге [2], демонстрирует его применение. Тем не менее, А.Г. Драгалин выдвигает требование выбора именно интуиционистской логики для конструктивизма: «Конструктивное направление в математике является с нашей точки зрения разновидностью интуиционизма» (см., например, [9], стр. 34), причём, это очевидный инсайт эксперта, без обоснований, как это принято среди экспертов. Еще один вариант *ad hoc* выбора логики демонстрирует также в виде инсайта эксперта известный конструктивист И.Д. Заславский, категорически утверждая [11] «Если не определена логическая система, в рамках которой мы находимся, то никакие математические рассуждения не являются возможными... каждая новая логика должна вводиться вне математики». Обсуждая физические объекты, он строит под них симметрическую логику, и применяет уже готовую логику к объекту своих исследований, которым является «предмет изучения ... процессы счета» ([11], стр. 57). Он не задается системным вопросом: если он изучает «процессы счета», то почему для построения теории этого объекта надо брать именно уже построенную без ссылок на этот объект симметрическую логику?

Категорная теория систем опирается на огромные области системных исследований, в первую очередь на теорию функциональных систем П.К. Анохина, отсюда возникли ее постулаты, которые порождают, в частности, и указанный вопрос.

В рамках указанного системного построения в работе изучаются направленные бинарные категорные склейки, являющиеся непосредственным обобщением обычной теории категорий. Детально исследован вопрос дуальности, при этом помимо известного феномена двойственности в категориях обнаруживается еще один вид двойственности, так называемая, свёрточная двойственность, порождающая вместе с известным вариантом двойственности в

категориях третий вариант дуальности, который находит применения в теории искусственных нейронных сетей. Развитый в статье аппарат в дальнейших работах обобщается на склеечные аналоги мультикатегорий и поликатегорий, моделирующие сетевые объекты, подобные высшим категориям, а также имеющие неспайковые виды межклеточной коммуникации. В этих работах, рассмотренный в данной статье материал используется как важный модельный пример, поскольку является вырожденным случаем общих категорных склеек.

Автор выражает благодарность академику РАН Гончарову С.С. и академику РАН Семенову А.Л. за полезные обсуждения вопросов логики и конструктивных подходов в математике.

Список литературы

1. Tolokonnikov G. K. Categorical model of neural networks, <https://openreview.net/group?id=mathai.club/MathAI/2025/Conference#tab-accept-oral>
2. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгорифмов. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. Mesarovic M.D. and Yasuhiko Takahara, General Systems Theory: Mathematical Foundations. New York.: ACADEMIC PRESS, 1975. 285 p.
4. Garner R. Polycategories via pseudo-distributive laws // Adv. Math. 2008. Vol. 218, № 3, P. 781-827.
5. Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. New York.: Springer, 1998. 332 p.
6. Hatcher W.S. The logical foundations of mathematics. New York.: Perg.Pr., 1982, 320 p.
7. Толоконников Г.К. Категорные склейки, категорные системы и их применение в алгебраической биологии // Биомашсистемы. т. 5. №. 1. 2021. С. 148-235.
8. Tolokonnikov G.K. Convolution Polycategories and Categorical Splices for Modeling Neural Networks // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. Vol. 938, P. 259-267.
9. Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979, 256 с.
10. Goldblatt R. Topoi. The categorial analysis of logic. New York.: Springer, 1984, 551 p.
11. Заславский И.Д. Симметрическая конструктивная логика. Ереван, 1978. 282 с.

