УДК 519.681.2, 519.681.3

Теоретико-категорная характеризация семантик систем переходов первичных структур событий с отменяемыми событиями при сохранении причинной зависимости

Грибовская Н.С. (Институт систем информатики СО РАН)

Вирбицкайте И.Б. (Институт систем информатики СО РАН)

Реверсивные (обратимые) вычисления, широко изучаемые в последние годы, представляют собой нетрадиционную форму вычислений, которые могут быть выполнены как в прямом, так и в обратном направлении. Любая последовательность действий, выполняемых системой, впоследствии может быть отменена по какой-либо причине (например, в случае ошибки), что позволяет восстановить предыдущие состояния системы, как если бы отмененные действия вообще не выполнялись. Структуры событий – это основополагающая модель теории параллелизма, позволяющая понять параллельные процессы путем описания происходящих событий и взаимосвязей между ними. В литературе выделяются два структурно отличающихся подхода к построению семантики систем переходов для моделей структур событий. Один подход основан на конфигурациях, т.е. наборах уже выполненных событий, а другой — на остаточных структурах, т.е. невыполненных фрагментах модели. Системы переходов, основанные на конфигурациях, в основном используются для представления семантики и эквивалентностей моделей параллелизма. Системы переходов, построенные на остаточных структурах, активно применяются для демонстрации согласованности операционной и денотационной семантик алгебраических исчислений параллельных процессов и для визуализации поведения моделей. В настоящей статье дается теоретико-категорная характеризация двух типов семантик систем переходов для обратимых первичных структур событий, учитывающих при отмене событий их причинно-следственные зависимости, и устанавливается взаимосвязь таких семантик, что может помочь при построении алгебраических описаний композиций обратимых параллельных процессов.

Ключевые слова: структуры событий, отменяемые события, системы переходов, бисимуляция, функторы, теория категорий

1. Введение

В последние годы концепция ‘обратимости’ вычислений широко изучалась в поисках механизмов, позволяющих отменять некоторые выполняемые в вычислительном процессе действия, которые по какой-либо причине необходимо аннулировать (например, в случае ошибки). 'Обратимые' вычисления могут выполняться не только в традиционном прямом направлении, но и в обратном, восстанавливая прошлые состояния и вычисляя входные данные из выходных. 'Обратимость' вычислений находит свое применение в различных областях, включая абстракции в программировании для разработки надежных и безопасных систем [31, 36], анализ и отладку программ [33], моделирование биохимических процессов [29], разработку аппаратного обеспечения и квантовые вычисления [13] и т.д.

В теории параллельных систем и процессов был изучен ряд аспектов 'обратимых' вычислений, связанных с различными моделями параллелизма: клеточными автоматами [26], алгебраическими исчислениями процессов [11, 32], сетями Петри [5, 14, 38, 41], структурами событий [37, 45, 47], мембранными системами [46] и т.д. Эти исследования привели к выявлению трех основных методов обращения параллельных процессов: обратное отслеживание [12, 42], причинная обратимость [11, 38, 42] и внепричинная обратимость [31, 41, 42], которые отличаются порядком выполнения действий в обратном направлении. Под обратным отслеживанием обычно понимается возможность отменять действия в порядке, обратном тому, в котором они были выполнены. Причинная обратимость предполагает, что действие может быть отменено при условии, что все действия, причинно зависящие от данного действия, (если таковые имеются) уже были отменены. Внепричинная обратимость — это форма обращения вычислений, не сохраняющая причинную зависимость и наиболее характерная для моделирования биохимических систем.

Структуры событий, предложенные Винскелем в его диссертации [48], являются одной из центральных моделей параллельных недетерминированных процессов. Структуры событий использовались для установления связей между различными моделями параллелизма [15, 17, 39, 48], для определения денотационной и операционной семантик алгебраических исчислений и языков спецификации параллельных процессов [9, 18, 27, 28, 30, 48], для определения поведенческих эквивалентностей между процессами [16], для моделирования квантовых стратегий и игр [49].

Известно, что установление связей между моделями систем переходов и структур событий способствует изучению и решению различных проблем анализа и верификации параллельных систем. Различают два метода построения семантики систем переходов для структур событий. В первом методе (см. [2, 15, 16, 25, 27, 48] среди прочих) состояния системы переходов — это конфигурации (наборы уже произошедших событий), а переходы между состояниями создаются, начиная с начальной (как правило, пустой) конфигурации, посредством расширения конфигураций за счет добавления событий, которые происходят в предыдущем состоянии. Во втором, более ‘структурно-композиционном’, методе (см. [4, 8, 10, 27, 28, 30, 34, 40] среди прочих) начальное состояние системы переходов — это заданная структура событий, состояния — это остаточные структуры, получаемые посредством удаления событий, уже произошедших и конфликтующих с ними в ходе выполнения структуры, а переходы между состояниями создаются по мере построения остаточных структур. В литературе системы переходов, основанные на конфигурациях, преимущественно применяются для определения семантики и эквивалентностей параллельных моделей, а системы переходов, основанные на остаточных структурах, — для построения операционной семантики алгебраических исчислений параллельных процессов и демонстрации согласованности операционной и денотационной семантик. Взаимосвязи между двумя типами систем переходов впервые изучались в статье [35] для наиболее простой модели — первичных структур событий, а затем в статьях [6] и [7] — для широкого спектра моделей структур событий с асимметричным и симметричным конфликтом.

Обратимые структуры событий расширяют структуры событий с целью представления параллельных недетерминированных процессов, способных отменять выполненные действия, позволяя конфигурациям изменяться посредством удаления событий, а не только добавления их. В работах [45, 47] Филлипс и др. определили причинные и внепричинные обратимые формы первичных [45], асимметричных [45, 47] и обобщенных [47] структур событий и показали соответствие между их конфигурациями и конфигурациями традиционных (без отменяемых событий) моделей. В статье [20] Граверсен и др. представили категории различных классов обратимых структур событий, включая упомянутые выше, и построили функторы между этими категориями. В работе [3] Обер и Кристеску разработали в терминах структур конфигураций ‘истинно’ параллельную семантику обратимого расширения CCS, RCCS (без автопараллелизма, автоконфликта и рекурсии). В статье [21] Граверсен и др. построили категорию обратимых структур событий с расслоением и симметричным конфликтом и использовали подкатегорию, учитывающую причинно-следственную зависимость между событиями, для моделирования семантики другого обратимого расширения CCS, CCSK. В работе [22] те же авторы представили π-исчисления со статической обратимостью, при которой выполнение действия не изменяет структуру процесса, и с динамической обратимостью, при которой выполнение действия перемещает его в отдельную историю. Для статического исчисления денотационная семантика определена в терминах структур событий с расслоением [27], которая индуктивно генерируется на основе структуры процесса. Для динамического исчисления операционная семантика построена на первичных структурах событий, которая генерируется из асинхронных систем переходов. Показано соответствие между результирующими структурами событий. В статье [44] логика идентификатора событий (EIL) была введена для расширения логики Хеннесси-Милнера с помощью обратных модальностей. EIL-эквивалентность соответствует эквивалентности наследуемой бисимуляции с сохранением истории (hereditary history-preserving bisimulation) в контексте стабильных структур конфигураций. В работах [19, 43] изучаются взаимосвязи различных поведенческих эквивалентностей в обратимых моделях.

Цель данной статьи — дать теоретико-категорную характеризацию двух типов семантик систем переходов, основанных на конфигурациях и на остаточных структурах, для обратимых первичных структур событий, учитывающих при отмене событий их причинно-следственные зависимости, и понять взаимосвязи этих семантик, что может помочь в построении алгебраических исчислений для описания композиций обратимых параллельных процессов.

Эта статья построена следующим образом. В разделе 2 рассматриваются синтаксис обратимых первичных структур событий и их шаговая семантика в терминах конфигураций/трасс. В разделе 3 определяется оператор удаления событий, который используется для построения остаточных структур, и демонстрируется корректность оператора. В разделе 4 разрабатывается два типа семантик систем переходов для обратимых первичных структур событий. В разделе 5 показываются различия между этими семантиками с теоретико-категорной точки зрения. В разделе 6 приводятся заключительные замечания. Приложение А содержит краткую справку по базовым определениям теории категорий, а в приложении Б представлены доказательства лемм и утверждений.

2. Обратимость в первичных структурах событий

В этом разделе сначала определяется модель первичных структур событий (ПСС) [48], а затем формулируется понятие обратимых первичных структур событий (ОПСС) [45], а также рассматривается их (шаговая) семантика и свойства.

Для формального описания поведения параллельных систем используются модели структур событий, в которых элементы поведения представлены событиями. Существуют различные способы определения отношений между событиями. В ПСС причинно-следственная зависимость между событиями задается частичным порядком, а несовместимость событий определяется отношением конфликта. Два события, которые не находятся ни в причинно-следственной зависимости, ни в конфликте, считаются независимыми (параллельными).

Определение 1. *(Помеченная)* первичная структура событий (ПСС) *(на множестве* $L = \{a, b, c, \dots\}$ *действий) — это кортеж* $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, C_0)$*, где*

- E *— счетное множество* событий*;*
- $< \subseteq E \times E$ *— иррефлексивный частичный порядок (*причинно-следственная зависимость *(ПСЗ)), удовлетворяющий* принципу конечности причин*: для каждого* $e \in E$ *верно, что* $\lfloor e \rfloor_< = \{e' \in E \mid e' < e\}$ *— конечное множество. Для подмножества* $X \subseteq E$ *событий будем писать* $\lfloor X \rfloor_<$*, чтобы обозначать множество* $\{e' \in E \mid e' < e$ *для некоторого* $e \in X\}$ *предшественников событий в* X*;*
- $\sharp \subseteq E \times E$ *— иррефлексивное симметричное отношение* конфликта*, удовлетворяющее* принципу наследования конфликта*: для всех* $e, e', e'' \in E$ *верно, что если* $e < e'$ *и* $e \sharp e''$*, то* $e' \sharp e''$*;*
- $l : E \to L$ *—* помечающая функция.

Итак, ПСС — это модель, основанная на событиях параллельных и недетерминированных процессов, в которой события, помеченные действиями, рассматриваются как атомарные, неделимые и мгновенные действия, некоторые из которых могут происходить только после других (т.е. существует ПСЗ, представленная иррефлексивным частичным порядком $<$ между событиями) и некоторые из которых не могут происходить вместе (т.е. между событиями существует конфликт $\sharp$). Кроме того, необходимы принцип конечности причин и принцип наследования конфликта.

ПСС выполняется по мере того, как происходят события, начиная с начального состояния и переходя из одного состояния в другое. Состояние в ПСС называется конфигурацией и представляет собой множество уже произошедших событий. Подмножество $X \subseteq E$ событий является *лево-замкнутым относительно* $<$, если для всех $e \in X$ верно, что $\lfloor e \rfloor_< \subseteq X$; является *бесконфликтным*, если для всех $e, e' \in X$ верно, что $\neg(e \sharp e')$, запись $CF(X)$ обозначает, что множество X бесконфликтно. Подмножество $C \subseteq E$ является *конфигурацией* в ПСС $\mathcal{E}$, если C конечно, лево-замкнуто относительно $<$ и бесконфликтно.

Обратимые первичные структуры событий (ОПСС) [45, 47] основаны на более слабой форме ПСС, поскольку принцип наследования конфликта может не сохраняться при добавлении обратимости. Кроме того, в ОПСС некоторые события рассматриваются как отменяемые, а также добавляются два отношения между событиями: обратная ПСЗ и отношение предотвращения. Первое отношение — это ПСЗ в обратном направлении, т.е. чтобы отменить событие в текущей конфигурации, в ней должны присутствовать события, от которых это событие обратимо зависит. Второе отношение, напротив, идентифицирует те события, присутствие которых в текущей конфигурации предотвращает отмену события.

Определение 2. *(Помеченная)* обратимая первичная структура событий (ОПСС) *(на множестве L) — это кортеж $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$, где*

- E *— счетное множество* событий*;*
- $\sharp \subseteq E \times E$ *— иррефлексивное и симметричное отношение* конфликта*;*
- $< \subseteq E \times E$ *— иррефлексивный частичный порядок (*причинно-следственная зависимость*), удовлетворяющая условию: для каждого $e \in E$ верно, что $\lfloor e \rfloor_<$ — конечное и бесконфликтное множество, а также для каждых $e, e' \in E$ верно, что если $e < e'$, то $\neg(e \sharp e')$;*
- $l : E \to L$ — помечающая функция*;*
- $F \subseteq E$ — отменяемые события*, обозначаемые через $\underline{F} = \{\underline{u} \mid u \in F\}$;*
- $\prec \subseteq E \times \underline{F}$ — обратная причинно-следственная зависимость *такая, что для каждого $u \in F$ верно, что $u \prec \underline{u}$ и $\llcorner u \lrcorner_\prec = \{e \mid e \prec \underline{u}\}$ — конечное и бесконфликтное множество;*
- $\rhd \subseteq E \times \underline{F}$ — отношение предотвращения *такое, что для каждого $u \in F$ верно: если $e \prec \underline{u}$, то $\neg(e \rhd \underline{u})$;*
- $\ll$ *— транзитивная* устойчивая причинно-следственная зависимость *такая, что $e \ll e'$, если и только если $e < e'$, а также $e' \rhd \underline{e}$, если $e \in F$. Отношение конфликта $\sharp$* наследуется по устойчивой ПСЗ $\ll$*: если $e \sharp e' \ll e''$, то $e \sharp e''$;*
- $C_0 \subseteq E$ — начальная конфигурация*, которая является конечным, лево-замкнутым относительно $<$ и бесконфликтным множеством.*

ОПСС с $\emptyset$-компонентами обозначается $\mathcal{O}$.

Несложно проверить, что любая ПСС также является ОПСС, имеющая $F = \emptyset$ и $C_0 = \emptyset$. Тогда любое понятие, определенное для ОПСС, применимо и к ПСС.

При графическом представлении ОПСС используются следующие обозначения. Действия, связанные с событиями, изображаются рядом с самими событиями. Если не возникнет двусмысленности, будем использовать действия, а не имена событий для обозначения событий. Неотменяемые события рисуются в квадратиках, а отменяемые — в кружочках. Отношение ПСЗ изображается сплошными стрелками (за исключением тех, которые выводятся по транзитивности), отношение обратной ПСЗ — пунктирными стрелками, а также показываются отношения конфликта и предотвращения. События, относящиеся к начальной конфигурации, окрашены в темно-серый цвет. Очевидно, что если начальная конфигурация представляет собой пустое множество, то никакие события не будут окрашены в темно-серый цвет.

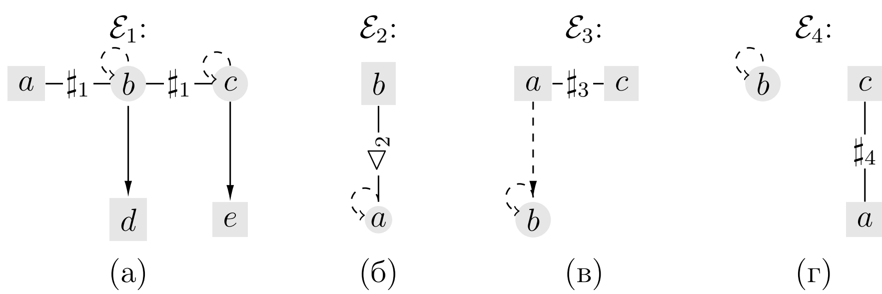

Рис. 1. Примеры ОПСС

Пример 1. *Рассмотрим показанную на рис. 1(а) структуру $\mathcal{E}_1$ с компонентами: $E_1 = \{a, b, c, d, e\}$; $<_1 = \{(b, d), (c, e)\}$; $\sharp_1 = \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, b)\}$; l_1 — идентичная функция; $F_1 = \{b, c\}$; $\prec_1 = \{(b, \underline{b}),\ (c, \underline{c})\}$; $\rhd_1 = \emptyset$; $C_0^1 = \emptyset$. Легко убедиться в том, что компоненты структуры $\mathcal{E}_1$ удовлетворяют соответствующим пунктам определения 2. В частности, видим, что для каждого события $f \in E_1$ (для каждого события $u \in F_1$) множество $\lfloor f \rfloor_{<_1}$ ($\llcorner u \lrcorner_{\prec_1}$) конечно и бесконфликтно; $<_1 = \{(b, d), (c, e)\}$ и $(b, d), (c, e) \notin \sharp_1$, а также $\prec_1 = \{(b, \underline{b}), (c, \underline{c})\}$ и $(b, \underline{b}), (c, \underline{c}) \notin \rhd_1$. Заметим, что $\sharp_1$ не наследуется по $<_1$, поскольку $a \sharp_1 b <_1 d$ и $\neg(a \sharp_1 d)$. Кроме того, пары (b, d) и (c, e) находятся в причинно-следственной зависисмости $<_1$, а отношение предотвращения $\rhd_1$ пусто. Тогда отношение устойчивой ПСЗ тоже пусто. Поэтому конфликт $\sharp_1$ наследуется по $\ll_1$. Таким образом, структура $\mathcal{E}_1$ является ОПСС.* ◇

ОПСС выполняется по мере того, как происходят и/или отменяются события, начиная с начальной конфигурации и переходя от одной конфигурации к другой. Множества событий, которые происходят/отменяются при таком переходе, называются шагами в ОПСС.

Достижимые конфигурации — это подмножества событий, которые могут быть получены из начальной конфигурации путем выполнения шагов. Последовательность шагов — трасса в ОПСС.

Определение 3. *Пусть $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$ — ОПСС и $C \subseteq E$ — конечное, левозамкнутое и бесконфликтное множество. Тогда*

- *для множеств $A \subseteq E$ и $B \subseteq F$ будем говорить, что шаг $A \cup \underline{B}$* возможен из *C, если выполнены следующие условия:*

  а) $A \cap C = \emptyset$, $B \subseteq C$, $(C \cup A)$ — конечное и бесконфликтное множество;

  б) $\forall e \in A, \forall e' \in E \,:\, e' < e \Rightarrow e' \in (C \setminus B)$;

  в) $\forall e \in B, \forall e' \in E \,:\, e' \prec \underline{e} \Rightarrow e' \in (C \setminus (B \setminus \{e\}))$;

  г) $\forall e \in B, \forall e' \in E \,:\, e' \rhd \underline{e} \Rightarrow e' \notin (C \cup A)$.

  Если шаг $A \cup \underline{B}$ возможен из C, то $C \xrightarrow{A \cup \underline{B}} C' = (C \setminus B) \cup A$. Будем писать $l(A \cup \underline{B}) = M$, если M — мультимножество на множестве L действий, определяемое следующим образом: $M = l(A \cup \underline{B}) = l(A) \cup \underline{l(B)}$, где мультимножество $l(X) = \sum_{a \in L} \mid \{e \in X \mid l(e) = a\} \mid$.

- *C —* (достижимая (из C_0)) конфигурация в *$\mathcal{E}$, если существуют множества $A_i \subseteq E$ и $B_i \subseteq F$ для всех $i = 1, \ldots, n$ $(n \geq 0)$ такие, что $C_{i-1} \xrightarrow{A_i \cup \underline{B}_i} C_i$ и $C_n = C$. В этом случае $t = (A_1 \cup \underline{B}_1) \ldots (A_n \cup \underline{B}_n)$ $(n \geq 0)$ —* трасса в *$\mathcal{E}$ и $last(t) = C_n$. Множество (достижимых) конфигураций в $\mathcal{E}$ обозначается как $Conf(\mathcal{E})$, а множество трасс в $\mathcal{E}$ — как $Trace(\mathcal{E})$. Понятно, что $C \in Conf(\mathcal{E})$ — бесконфликтное множество.*

- *Две трассы $t = (A_1 \cup \underline{B}_1) \ldots (A_n \cup \underline{B}_n)$ $(n \geq 0)$ и $t' = (A'_1 \cup \underline{B'}_1) \ldots (A'_m \cup \underline{B'}_m)$ $(m \geq 0)$ в $\mathcal{E}$ называются* эквивалентными *(обозначается $t \sim t'$), если $last(t) = last(t')$. Эквивалентный класс для трассы t обозначается $[t]$.*

Пример 2. *Сначала вспомним пример 1 с ОПСС $\mathcal{E}_1$ с компонентами: $E_1 = \{a, b, c, d, e\}$; $<_1 = \{(b, d), (c, e)\}$; $\sharp_1 = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$; l_1 — идентичная функция; $F_1 = \{b, c\}$; $\prec_1 = \{(b, \underline{b}), (c, \underline{c})\}$; $\rhd_1 = \emptyset$; $C_0^1 = \emptyset$. Рассмотрим возможные шаги из начальной конфигурации в $\mathcal{E}_1$.*

Так как события a, b и c не имеют предшественников по ПСЗ, то возможны следующие вперед-переходы: $\emptyset \overset{(\{a\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{a\}$, $\emptyset \overset{(\{b\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{b\}$ и $\emptyset \overset{(\{c\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{c\}$. Поскольку пара (b, d) $((c, e))$ принадлежит отношению $<_1$, то событие d (e) не может произойти перед тем, как событие b (c) произойдет. Тогда получаем следующий вперед-переход: $\{b\} \overset{(\{d\} \cup \emptyset)}{\rightarrow} \{b, d\}$

$(\{c\} \overset{(\{e\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{c,e\})$. Из конфигураций $\{b\}$ и $\{b,d\}$ ($\{c\}$ и $\{c,e\}$) возможен назад-шаг $(\emptyset\cup\{\underline{b}\})$ $((\emptyset\cup\{\underline{c}\}))$, поскольку $(b,\underline{b}) \in \prec_1$ ($(c,\underline{c}) \in \prec_1$), т.е. единственный предшественник по обратной ПСЗ для события b (c) — само это событие, а также $\rhd_1 = \emptyset$, т.е. нет событий, которые могли бы предотвратить отмену события b (c). Далее может иметь место вперед-переход $\{d\} \overset{(\{c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{c,d\}$ ($\{e\} \overset{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,e\}$), так как событие c (b) не имеет предшественников по ПСЗ и события c и d (b и e) независимы (параллельны). Поскольку пара (c,e) ((b,d)) принадлежит отношению $<_1$ и события d и e параллельны, получаем вперед-переход $\{c,d\} \overset{(\{e\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{c,d,e\}$ ($\{b,e\} \overset{(\{d\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,e,d\}$). Затем возможен назад-переход $\{c,d,e\} \overset{(\emptyset\cup\{\underline{c}\})}{\rightarrow} \{d,e\}$ ($\{b,d,e\} \overset{(\emptyset\cup\{\underline{b}\})}{\rightarrow} \{d,e\}$), так как $(b,\underline{b}) \in \prec_1$ ($(c,\underline{c}) \in \prec_1$) и $\rhd_1 = \emptyset$. Таким образом, видим, что $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{b,d\}$, $\{c,e\}$, $\{c,d\}$, $\{b,e\}$, $\{d,e\}$, $\{b,d,e\}$, $\{c,d,e\}$ — конфигурации в $\mathcal{E}_1$. Исходя из того, что событие a параллельно с событиями c, d, e, имеем такие конфигурации: $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{a,e\}$, $\{a,c,e\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,d,e\}$, $\{a,c,e,d\}$. Так как пара (a,b) ((b,c)) принадлежит отношению $\sharp_1$, события a и b (b и c) не могут быть вместе в какой-либо конфигурации. Следовательно, все достижимые конфигурации в $\mathcal{E}_1$ перечислены выше. Заметим, что следующие конфигурации достижимы только посредством комбинации вперед- и назад-шагов: $\{d\}$, $\{e\}$, $\{b,e\}$, $\{c,d\}$, $\{d,e\}$, $\{b,d,e\}$, $\{c,d,e\}$, $\{a,d\}$, $\{a,e\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,d,e\}$, $\{a,c,e,d\}$.

Рассмотрим на рис. 1(б) ОПСС $\mathcal{E}_2$ с компонентами: $E_2 = \{a,b\}$; $<_2 = \emptyset$; $\sharp_2 = \emptyset$; l_2 — идентичная функция; $F_2 = \{a\}$; $\prec_2 = \{(a,\underline{a})\}$; $\rhd_2 = \{(b,\underline{a})\}$; $C_0^2 = \emptyset$. Поскольку отношения $<_2$ и $\sharp_2$ пусты, события a и b параллельны и поэтому они могут присходить в любом порядке или одновременно. Тогда возможны вперед-шаги: $\emptyset \overset{(\{a\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a\} \overset{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$, $\emptyset \overset{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b\} \overset{(\{a\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$ и $\emptyset \overset{(\{a,b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$. Так как верно, что $b \rhd_2 \underline{a}$, событие b предотвращает отмену события a, т.е. a не может быть отменено, если b присутствует в конфигурации. Тогда можем идти назад из $\{a\}$ в $\emptyset$ посредством шага $(\emptyset\cup\{\underline{a}\})$ и не можем идти назад из $\{a,b\}$. Конфигурации в $\mathcal{E}_2$ — это множества $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$. Трассы в $\mathcal{E}_2$ — это префиксы последовательностей:

$((\{a\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{a}\}))^*(\{a\}\cup\emptyset)(\{b\}\cup\emptyset)$,

$((\{a\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{a}\}))^*(\{a,b\}\cup\emptyset)$,

$((\{a\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{a}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)(\{a\}\cup\emptyset)$.

Посмотрим, как выполняется показанная на рис. 1(в) ОПСС $\mathcal{E}_3$ с компонентами: $E_3 = \{a,b,c\}$; $<_3 = \emptyset$; $\sharp_3 = \{(a,c),(c,a)\}$; l_3 — идентичная функция; $F_3 = \{b\}$; $\prec_3 = \{(a,\underline{b}),\ (b,\underline{b})\}$;

$\rhd_3 = \emptyset$; $C_0^3 = \emptyset$. *Так как отношение* $<_3$ *пусто, то все события в ОПСС* $\mathcal{E}_3$ *не имеют предшественников по ПСЗ и поэтому из начальной конфигурации* C_0^3 *возможны такие вперед-шаги:* $\emptyset \stackrel{(\{a\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a\}$, $\emptyset \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b\}$ *и* $\emptyset \stackrel{(\{c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{c\}$. *Поскольку события* a *и* b *(*b *и* c*) параллельны, то имеем вперед-шаги:* $\emptyset \stackrel{(\{a,b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$, $\{a\} \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$ *и* $\{b\} \stackrel{(\{a\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$ *(*$\emptyset \stackrel{(\{b,c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b\}$, $\{b\} \stackrel{(\{c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,c\}$ *и* $\{c\} \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,c\}$*). Так как события* a *и* c *конфликтуют, они не могут вместе присутствовать ни в какой конфигурации. Тогда конфигурации* $\{a,b\}$ *и* $\{b,c\}$ *не могут быть расширены соответственно событием* c *и событием* a. *Отношение* $\prec_3 = \{(a,\underline{b}),\ (b,\underline{b})\}$ *говорит о том, что событие* b *может быть отменено только, если оба события* a *и* b *уже произошли. Так как отношение* $\rhd_3$ *пусто, то получаем* $\{a,b\} \stackrel{(\emptyset\cup\{\underline{b}\})}{\rightarrow} \{a\}$. *Таким образом,* $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$ *— конфигурации в* $\mathcal{E}_3$. *Трассы в* $\mathcal{E}_3$ *— это префиксы последовательностей:*

$(\{b\}\cup\emptyset)(\{c\}\cup\emptyset)$, $(\{c\}\cup\emptyset)(\{b\}\cup\emptyset)$, $(\{b,c\}\cup\emptyset)$,

$(\{a\}\cup\emptyset)((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*$,

$(\{b\}\cup\emptyset)(\{a\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$,

$(\{a,b\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$.

В конце построим конфигурации и трассы изображенной на рис. 1(г) ОПСС $\mathcal{E}_4$ *с компонентами:* $E_4 = \{a,b,c\}$; $<_4 = \emptyset$; $\sharp_4 = \{(a,c),(c,a)\}$; l_4 *— идентичная функция;* $F_4 = \{b\}$; $\prec_4 = \{(b,\underline{b})\}$; $\rhd_4 = \emptyset$; $C_0^4 = \emptyset$. *Поскольку отношение* $<_4$ *пусто и отношение* $\sharp_4$ *содержит только пары* (a,c) *и* (c,a), *события* a *и* b *(*b *и* c*) параллельны и поэтому могут происходить в любом порядке или одновременно. Следовательно, имеем следующие вперед-шаги:* $\emptyset \stackrel{(\{a\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a\} \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$, $\emptyset \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b\} \stackrel{(\{a\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$ *и* $\emptyset \stackrel{(\{a,b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{a,b\}$ *(*$\emptyset \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b\} \stackrel{(\{c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,c\}$, $\emptyset \stackrel{(\{c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{c\} \stackrel{(\{b\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,c\}$ *и* $\emptyset \stackrel{(\{b,c\}\cup\emptyset)}{\rightarrow} \{b,c\}$*). Единственное событие, необходимое для отмены события* $b \in F_4$, *— само это событие, поскольку* $\prec_4 = \{(b,\underline{b})\}$. *Так как* $\rhd_4 = \emptyset$, *событие* b *может быть отменено в любой конфигурации, где оно присутствует. Конфигурации в* $\mathcal{E}_4$ *— это множества* $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$. *Трассы в* $\mathcal{E}_4$ *— префиксы последовательностей:*

$((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)(\{x\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$,

$((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{x\}\cup\emptyset)((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$,

$((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{x,b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$,

где $x \in \{a,c\}$. $\diamond$

ОПСС способны моделировать такую особенность обратимых вычислений, как согласованность отношения обратимости с отношением ПСЗ: событие может быть отменено при условии, что все его последователи по ПСЗ были отменены. Это понятие обратимости естественно для надежных параллельных систем, поскольку при возникновении ошибки система пытается корректно вернуться к предыдущему состоянию.

Определение 4. *ОПСС* $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$ *называется*

- учитывающей причино-следственную зависимость *(со свойством УПСЗ), если для событий* $e, e' \in E$ *верно, что* $e < e' \;\Rightarrow\; e \ll e'$*;*
- сохраняющей причино-следственную зависимость *(со свойством СПСЗ), если для событий* $e \in E$ *и* $u \in F$ *верно, что* $e \prec \underline{u} \;\Leftrightarrow\; e = u$*, а также* $e \rhd \underline{u} \;\Leftrightarrow\; u < e$*.*

Неформально говоря, в ОПСС со свойствами УПСЗ и СПСЗ предшественники по ПСЗ могут быть отменены в текущей конфигурации только, если их последователи по ПСЗ не присутствуют в этой конфигурации. Понятно, что ОПСС со свойством СПСЗ также является ОПСС со свойством УПСЗ.

Пример 3. *Сначала вспомним ОПСС* $\mathcal{E}_1$ *из примеров 1 и 2 с компонентами:* $E_1 = \{a, b, c, d, e\}$*;* $<_1 = \{(b, d), (c, e)\}$*;* $\sharp_1 = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$*;* l_1 *— идентичная функция;* $F_1 = \{b, c\}$*;* $\prec_1 = \{(b, \underline{b}), (c, \underline{c})\}$*;* $\rhd_1 = \emptyset$*;* $C_0^1 = \emptyset$*. Известно из примера 1, что отношение устойчивой ПСЗ* $\ll_1$ *пусто, потому что отношение ПСЗ* $<_1$ *содержит пары* (b, d) *и* (c, e)*, а отношение предотвращения* $\rhd_1$ *пусто. Поскольку имеем* $\ll_1 \neq <_1$*,* $\mathcal{E}_1$ *не обладает свойствами УПСЗ и СПСЗ.*

Проверим свойства ОПСС $\mathcal{E}_2$ *из примера 2 с компонентами:* $E_2 = \{a, b\}$*;* $<_2 = \emptyset$*;* $\sharp_2 = \emptyset$*;* l_2 *— идентичная функция;* $F_2 = \{a\}$*;* $\prec_2 = \{(a, \underline{a})\}$*;* $\rhd_2 = \{(b, \underline{a})\}$*;* $C_0^2 = \emptyset$*. ОПСС* $\mathcal{E}_2$ *имеет свойство УПСЗ, поскольку отношение* $<_2$ *пусто и, следовательно, отношение* $\ll_2$ *пусто, т.е.* $<_2 = \ll_2$*. С другой стороны, ОПСС* $\mathcal{E}_2$ *не обладает свойством СПСЗ, потому что есть события* a *и* b *такие, что* $b \rhd_2 \underline{a}$ *и* $a \not<_2 b$*.*

Расссмотрим ОПСС $\mathcal{E}_3$ *из примера 2 с компонентами:* $E_3 = \{a, b, c\}$*;* $<_3 = \emptyset$*;* $\sharp_3 = \{(a, c), (c, a)\}$*;* l_3 *— идентичная функция;* $F_3 = \{b\}$*;* $\prec_3 = \{(a, \underline{b}),\ (b, \underline{b})\}$*;* $\rhd_3 = \emptyset$ *и* $C_0^3 = \emptyset$*. Так как множество последователей по ПСЗ для единственно отменяемого события* b *в* $\mathcal{E}_3$ *пусто, то* $\mathcal{E}_3$ *имеет свойство УПСЗ, но она не обладает свойством СПСЗ, поскольку имеем* $(a, \underline{b}) \in \prec_3$ *и* $a \neq b$*.*

В конце проанализируем свойства ОПСС $\mathcal{E}_4$ *из примера 2 с компонентами:* $E_4 = \{a, b, c\}$*;* $<_4 = \emptyset$*;* $\sharp_4 = \{(a, c), (c, a)\}$*;* l_4 *— идентичная функция;* $F_4 = \{b\}$*;* $\prec_4 = \{(b, \underline{b})\}$*;* $\rhd_4 = \emptyset$*;* $C_0^4 = \emptyset$*. ОПСС* $\mathcal{E}_4$ *обладает свойством СПСЗ, а значит, и свойством УПСЗ.*

Это потому, что верно следующее: $<_4 = \emptyset$ и $\rhd_4 = \emptyset$, а также предшественник по обратной ПСЗ для отмены единственного отменяемого события b — само это событие, поскольку имеем $F_4 = \{b\}$ и $\prec_4 = \{(b, \underline{b})\}$. $\diamond$

Следующая лемма говорит об особенности конфигураций в ОПСС со свойсвом УПСЗ, которые остаются лево-замкнутыми относительно ПСЗ при выполнении ОПСС. Благодаря определениям 2 и 3, истинность леммы следует из леммы 13(i) [24].

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}$ — ОПСС со свойством УПСЗ и $C \in Conf(\mathcal{E})$. Тогда C лево-замкнуто относительно $<$.*

Приведенный ниже пример объясняет приведенную выше лемму.

Пример 4. *Вспомним ОПСС $\mathcal{E}_1$ ($<_1 = \{(b, d), (c, e)\}$) из примеров 1–3, не обладающую свойством УПСЗ. Знаем, что $\{d\}$, $\{e\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{d, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, d, e\}$ и т.д. — конфигурации в $\mathcal{E}_1$. Видим, что эти конфигурации не являются лево-замкнутыми относительно $<_1$.*

Легко проверить, что в ОПСС $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$ из примеров 2–3, обладающих свойством УПСЗ, все конфигурации лево-замкнуты относительно ПСЗ. $\diamond$

3. Остаточные ОПСС

Оператор удаления для ОПСС, основанный на удалении из структуры событий уже произошедших событий и конфликтующих с ними, необходим для построения остаточных ОПСС.

В отличии от работы [1], где оператор удаления задан для более узкого подкласса ОПСС со свойством СПСЗ на основе понятия конфигурации, введем определение оператора удаления, используя понятие трассы. Это определение упрощает определение оператора удаления из статьи [23] в части построения множеств предшественников неотменяемых событий в шагах трассы.

Определение 5. *Пусть $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$ — ОПСС со свойством УПСЗ и $t = (A_1 \cup \underline{B}_1) \ldots (A_n \cup \underline{B}_n) \in Traces(\mathcal{E})$ ($C_0 \overset{A_1 \cup \underline{B}_1}{\to} C_1 \ldots C_{n-1} \overset{A_n \cup \underline{B}_n}{\to} C_n$)* $(n \geq 0)$. Остаточная структура *$\mathcal{E} \backslash t$ для $\mathcal{E}$ после t посредством оператора $\backslash$ удаления определяется по индукции $0 \leq i \leq n$ следующим образом:*

$i = 0$. $\mathcal{E} \setminus (t_0 = \epsilon) = (E^0 = E,\ <^0 = <,\ \sharp^0 = \sharp,\ l^0 = l,\ F^0 = F,\ \prec^0 = \prec,\ \rhd^0 = \rhd,\ C_0^0 = C_0) = \mathcal{E}$.

$i > 0$. $\mathcal{E} \setminus t_i = (E^i,\ <^i = <^{i-1} \cap (E^i \times E^i),\ \sharp^i = \sharp^{i-1} \cap (E^i \times E^i),\ l^i = l^{i-1} |_{E^i},\ F^i,\ \prec^i = \prec^{i-1} \cap (E^i \times \underline{F}^i),\ \rhd^i = \rhd^{i-1} \cap\ (E^i \times \underline{F}^i),\ C_0^i)$, *где*

– $E^i = E^{i-1} \setminus (\widetilde{A}_i \cup \sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i))$, *где*

$\widetilde{A}_i = (A_i \setminus F^{i-1}) \ \cup \ \lfloor (A_i \setminus F^{i-1}) \rfloor_{<^{i-1}} = \{\widetilde{a} \in E^{i-1} \mid \exists a \in A_i \setminus F^{i-1} \colon \widetilde{a} <^{i-1} a\})$,

$\sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i) = \{a \in E^{i-1} \mid \exists \widetilde{a} \in \widetilde{A}_i \ : \ a \ \sharp^{i-1} \ \widetilde{a}\}$;

– $F^i = (F^{i-1} \cap E^i) \setminus \left(\hat{A}_i \cup \hat{\hat{A}}_i\right)$, *где*

$\hat{A}_i = \{e \in F^{i-1} \mid \exists a \in \widetilde{A}_i \colon a \rhd^{i-1} \underline{e}\}$,

$\hat{\hat{A}}_i = \{e \in F^{i-1} \mid \exists a \in \sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i) \colon a \prec^{i-1} \underline{e}\}$;

– $C_0^i = ((C_0^{i-1} \setminus B_i) \cup A_i) \cap E^i$.

$\mathcal{E} \setminus t = \mathcal{E} \setminus t_n$.

Интуитивная интерпретация приведенного выше определения заключается в следующем.

$i = 0$. Остаточная структура $\mathcal{E} \setminus \epsilon$ для ОПСС $\mathcal{E}$ после пустой трассы ϵ — это сама ОПСС.

$i > 0$. На каждом этапе $1 \leq i \leq n$ построения остаточной структуры $\mathcal{E} \setminus t_i$ для ОПСС $\mathcal{E}$ после трассы $t_i = (A_1 \cup \underline{B}_1) \ldots (A_i \cup \underline{B}_i)$ выполняется следующее:

– Множество E^i событий на i-ом этапе формируется из множества E^{i-1} событий $(i-1)$-го этапа посредством удаления событий из:

* множества $\widetilde{A}_i = (A_i \setminus F^{i-1}) \ \cup \ \lfloor (A_i \setminus F^{i-1}) \rfloor_{<^{i-1}}$, где $(A_i \setminus F^{i-1})$ — множество неотменяемых событий, происходящих на i-ом шаге, и $\lfloor (A_i \setminus F^{i-1}) \rfloor_{<^{i-1}}$ — множество событий, которые являются предшественниками по ПСЗ для событий из $(A_i \setminus F^{i-1})$ и которые происходят перед i-ым шагом;
* множества $\sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i) = \{a \in E^{i-1} \mid \exists \widetilde{a} \in \widetilde{A}_i \ : \ a \ \sharp^{i-1} \ \widetilde{a}\}$ событий, конфликтующих с событиями из $\widetilde{A}_i$.

В силу правила выполнения шага и пункта б) в определении 3, события из множества $\widetilde{A}_i$ присутствуют в конфигурации C_i, тогда как по пункту а) определения 3, события из множества $\sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i)$ отсутствуют в C_i. Понятно, неотменяемые события из множества $\widetilde{A}_i$ не могут быть отменены ни на одном последующем шаге. Тогда в ОПСС со свойством УПСЗ [i] отменяемые события из множества $\widetilde{A}_i$ не могут быть отменены впоследствии, согласно пункту г) определения 3. Поскольку, по пункту а) определения 3, события из $\widetilde{A}_i$ в ОПСС со свойством УПСЗ и события из $\sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i)$ в любой ОПСС не могут произойти в дальнейшем, то оператор удаляет события из $(\widetilde{A}_i \cup \sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i))$ на i-ом этапе.

– Множество F^i отменяемых на i-ом этапе событий — это пересечение множеств

[i] Для событий $e, e' \in E$ верно, что $e < e' \ \Rightarrow \ e' \rhd e$, если $e \in F$.

F^{i-1} отменяемых событий на $(i-1)$-ом этапе и E^{i-1} оставшихся на i-ом этапе событий, из которого удаляются события из:

* множества $\hat{A}_i$ отменяемых событий на $(i-1)$-ом этапе, которых события из $\widetilde{A}_i$ предотвращают от отмены;
* множества $\hat{\hat{A}}$ отменяемых событий на $(i-1)$-ом этапе, для которых события из $\sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i)$ являются обратной причиной.

Поскольку события из $\widetilde{A}_i$ уже присутствуют в конфигурации C_i и не могут быть отменены впоследствии в ОПСС со свойством УПСЗ, то события из $\hat{A}_i$ становятся неотменяемыми, в силу пункта г) определения 3, в ОПСС со свойством УПСЗ. Так как события из $\sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i)$ отсутствуют в C_i и не могут произойти в дальнейшем, то события из $\hat{\hat{A}}$ становятся неотменяемыми, согласно пункту в) определения 3.

– На основе полученных множеств E^i и F^i строятся отношения $<^i$, $\sharp^i$, $\prec^i$, $\rhd^i$ и помечающая функция l^i на i-ом этапе.

– Начальная конфигурация C_0^i на i-ом этапе формируется из событий, оставшихся на i-ом этапе и принадлежащих начальной конфигурации на $(i-1)$-ом этапе, измененной посредством выполнения шага $(A_i \cup \underline{B}_i)$.

Ниже приведены характерные свойства оператора удаления.

Лемма 2. *Для ОПСС $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$ со свойством УПСЗ (СПСЗ), трассы $t = (A_1 \cup \underline{B_1}) \ldots (A_n \cup \underline{B_n})$ $(C_0 \overset{A_1 \cup B_1}{\to} C_1 \ \ldots \ C_{n-1} \overset{A_n \cup B_n}{\to} C_n)$ $(n \geq 0)$ в $\mathcal{E}$ и остаточной структуры $\mathcal{E} \setminus t = (E^n, <^n, \sharp^n, l^n, F^n, \prec^n, \rhd^n, C_0^n)$ верно:*

(а) $E^j \subseteq E^i$, $F^j \subseteq F^i$, $l^j \subseteq l^i$, $\nabla^j \subseteq \nabla^i$ $(\nabla \in \{<, \sharp, \prec, \rhd\})$ для всех $0 \leq i \leq j \leq n$;

(б) $\mathcal{E} \setminus t_i$ – ОПСС со свойством УПСЗ (СПСЗ) для всех $0 \leq i \leq n$;

(в) $B_i \subseteq F^{i-1}$ для всех $1 \leq i \leq n$;

(г) $A_i \subseteq E^{i-1}$ для всех $1 \leq i \leq n$;

(д) $\widetilde{A}_i \subseteq C_n$ для всех $1 \leq i \leq n$;

(е) $C_0^n = C_n \cap E^n$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3 из статьи [23], но с учетом разницы определения множества предшественников по ПСЗ неотменяемых событий в шаге трассы в определении 5.

Проиллюстрируем применение оператора удаления.

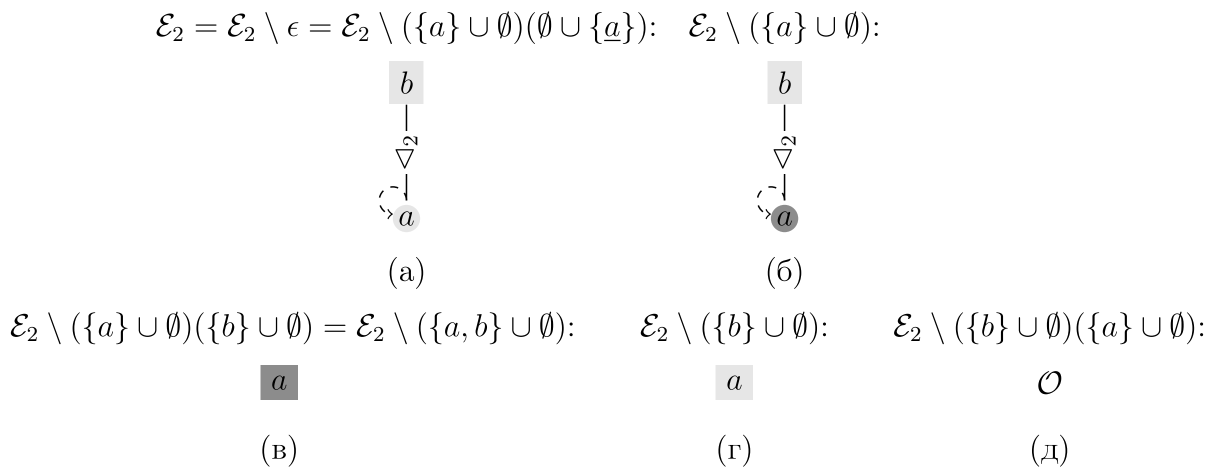

Рис. 2. Остаточные структуры для $\mathcal{E}_2$

Пример 5. *Рассмотрим обладающую свойством УПСЗ ОПСС $\mathcal{E}_2$ из примеров 2–4 с компонентами: $E_2 = \{a, b\}$; $<_2 = \emptyset$; $\sharp_2 = \emptyset$; l_2 — идентичная функция; $F_2 = \{a\}$; $\prec_2 = \{(a, \underline{a})\}$; $\rhd_2 = \{(b, \underline{a})\}$; $C_0^2 = \emptyset$. Знаем, что трассы в $\mathcal{E}_2$ — префиксы последовательностей: $((\{a\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{a}\}))^*(\{a\}\cup\emptyset)(\{b\}\cup\emptyset)$, $((\{a\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{a}\}))^*(\{a, b\}\cup\emptyset)$, $((\{a\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{a}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)(\{a\} \cup \emptyset)$.*

Применяя оператор удаления к ОПСС $\mathcal{E}_2$ и её трассам, получаем следующие структуры:

- $\grave{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus \epsilon = (E_2, <_2, \sharp_2, l_2, F_2, \prec_2, \rhd_2, C_0^2)$ *(см. рис. 2(а));*
- $\tilde{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus (A_1 = \{a\} \cup \underline{B}_1 = \emptyset) = (\tilde{E} = E_2,\ \tilde{<} = <_2,\ \tilde{\sharp} = \sharp_2,\ \tilde{l} = l_2,\ \tilde{F} = F_2,\ \tilde{\prec} = \prec_2,\ \tilde{\rhd} = \rhd_2,\ \tilde{C}_0 = \{a\})$, *поскольку* $(\widetilde{A}_1 \cup \sharp_2(\widetilde{A}_1)) = \emptyset$, *благодаря тому, что* $a \in F_2$, *и* $\tilde{C}_0 = ((C_0^2 = \emptyset) \cup (A_1 = \{a\})) \cap (\tilde{E} = \{a, b\}) = \{a\}$ *(см. рис. 2(б));*
- $\hat{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus (A_1 = \{a\} \cup \underline{B}_1 = \emptyset)(A_2 = \emptyset \cup \underline{B}_2 = \{\underline{a}\}) = \mathcal{E}_2$, *так как* $(\widetilde{A}_2 \cup \dot{\sharp}(\widetilde{A}_2)) = \emptyset$, *по причине того, что* $A_2 = \emptyset$, *и* $((\tilde{C}_0 = \{a\}) \setminus B_2 = \{a\}) \cap \hat{E}_2 = \emptyset$ *(см. рис. 2(а));*
- $\breve{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus (A_1 = \{a\} \cup \underline{B}_1 = \emptyset)(A_2 = \{b\} \cup \underline{B}_2 = \emptyset) = (\breve{E} = \{a\},\ \breve{<} = \emptyset,\ \breve{\sharp} = \emptyset;\ \breve{l} = l_2|_{\{a\}};\ \breve{F} = \emptyset;\ \breve{\prec} = \emptyset;\ \breve{\rhd} = \emptyset,\ \breve{C}_0 = \{a\})$, *потому что* $\widetilde{A}_2 = \{b\}$, *благодаря тому, что* $b \in A_2 \setminus \tilde{F}$, *и* $a \notin \breve{F}$, *благодаря тому* $(b, \underline{a}) \in \tilde{\rhd}$, *а также* $\breve{C}_0 = ((\tilde{C}_0 = \{a\}) \cup (A_2 = \{b\})) \cap (\breve{E} = \{a\}) = \{a\}$ *(см. рис. 2(в));*
- $\check{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus (A_1 = \{a, b\} \cup \underline{B}_1 = \emptyset) = \breve{\mathcal{E}}_2$, *поскольку* $\widetilde{A}_1 = \{b\}$, *так как* $b \in A_1 \setminus F_2$, *и* $a \notin \check{F}$, *так как* $(b, \underline{a}) \in \rhd_2$, *а также* $\check{C}_0 = ((C_2^0 = \emptyset) \cup (A_1 = \{a, b\})) \cap (\check{E} = \{a\}) = \{a\} = \breve{C}_0$ *(см. рис. 2(в));*
- $\dot{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus (A_1 = \{b\} \cup \underline{B}_1 = \emptyset) = (\dot{E} = \{a\},\ \dot{<} = \emptyset,\ \dot{\sharp} = \emptyset,\ \dot{l} = l_2|_{\{a\}},\ \dot{F} = \emptyset,\ \dot{\prec} = \emptyset,\ \dot{\rhd} = \emptyset,\ \dot{C}_0 = \emptyset)$, *так как* $\widetilde{A}_1 = \{b\}$, *в силу* $b \in A_1 \setminus F_2$, *и* $a \notin \dot{F}$, *в силу* $(b, \underline{a}) \in \rhd_2$, *а*

также $\dot{C}_0 = ((C_2^0 = \emptyset) \cup (A_1 = \{b\})) \cap (\dot{E} = \{a\}) = \emptyset$ *(см. рис. 2(г));*

– $\ddot{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus (A_1 = \{b\} \cup \underline{B}_1 = \emptyset)(A_2 = \{a\} \cup \underline{B}_2 = \emptyset) = (\ddot{E} = \emptyset,\ \ddot{<} = \emptyset,\ \ddot{\sharp} = \emptyset,\ \ddot{l} = \emptyset,\ \ddot{F} = \emptyset,\ \ddot{\prec} = \emptyset,\ \ddot{\triangleright} = \emptyset,\ \ddot{C}_0 = \emptyset)$, *потому что* $\widetilde{A}_2 = \{a\}$, *благодаря тому, что* $a \in A_2 \setminus \dot{F}$, *а также* $\ddot{C}_0 = ((\dot{C}_0 = \emptyset) \cup (A_2 = \{a\})) \cap (\dot{E} = \emptyset) = \emptyset$ *(см. рис. 2(д)).*

Отметим, что оператор удаления создает одинаковые остаточные структуры после различных трасс. Например, легко видеть, что:

$\grave{\mathcal{E}}_2 = \hat{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus ((\{a\} \cup \emptyset)(\emptyset \cup \{\underline{a}\}))^*$,

$\tilde{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus ((\{a\} \cup \emptyset)(\emptyset \cup \{\underline{a}\}))^*(\{a\} \cup \emptyset)$,

$\breve{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus ((\{a\} \cup \emptyset)(\emptyset \cup \{\underline{a}\}))^*(\{a\} \cup \emptyset)(\{b\} \cup \emptyset) =$

$\check{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus ((\{a\} \cup \emptyset)(\emptyset \cup \{\underline{a}\}))^*(\{a, b\} \cup \emptyset)$,

$\dot{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus ((\{a\} \cup \emptyset)(\emptyset \cup \{\underline{a}\}))^*(\{b\} \cup \emptyset)$,

$\ddot{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus ((\{a\} \cup \emptyset)(\emptyset \cup \{\underline{a}\}))^*(\{b\} \cup \emptyset)(\{a\} \cup \emptyset)$.

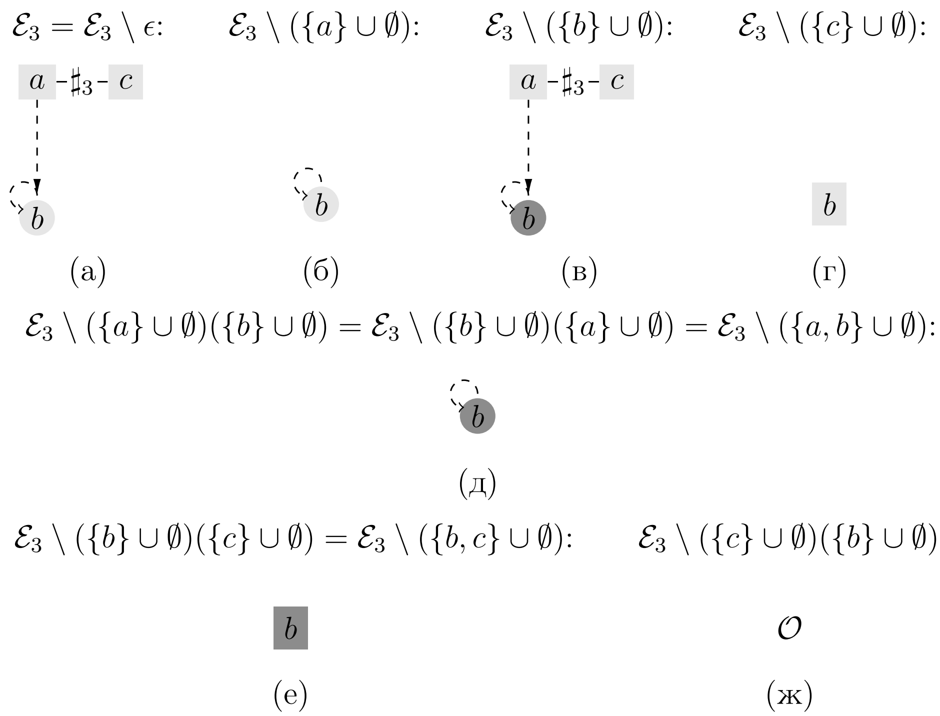

Рис. 3. Остаточные структуры для $\mathcal{E}_3$

Теперь рассмотрим обладающую свойством УПСЗ ОПСС $\mathcal{E}_3$ *из примеров 2–4 с компонентами:* $E_3 = \{a, b, c\}$; $<_3 = \emptyset$; $\sharp_3 = \{(a, c), (c, a)\}$; l_3 *— идентичная функция;* $F_3 = \{b\}$; $\prec_3 = \{(a, \underline{b}),\ (b, \underline{b})\}$; $\triangleright_3 = \emptyset$ *и* $C_0^3 = \emptyset$. *Знаем, что трассы в* $\mathcal{E}_3$ *— это префиксы последовательностей:*

$(\{b\} \cup \emptyset)(\{c\} \cup \emptyset)$, $(\{c\} \cup \emptyset)(\{b\} \cup \emptyset)$, $(\{b, c\} \cup \emptyset)$,

$(\{a\}\cup\emptyset)((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*$,

$(\{b\}\cup\emptyset)(\{a\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$,

$(\{a,b\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$.

Остаточные структуры для ОПСС $\mathcal{E}_3$ после некоторых её трасс показаны на рис. 3. А также имеем:

$\mathcal{E}_3\setminus(\{a\}\cup\emptyset)=\mathcal{E}_3\setminus(\{a\}\cup\emptyset)((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^\star=\mathcal{E}_3\setminus(\{b\}\cup\emptyset)(\{a\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*$;

$\mathcal{E}_3\setminus(\{a\}\cup\emptyset)(\{b\}\cup\emptyset)=\mathcal{E}_3\setminus(\{a\}\cup\emptyset)((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*=\mathcal{E}_3\setminus(\{b\}\cup\emptyset)(\{a\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)=\mathcal{E}_3\setminus(\{a,b\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^*(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$.

Поэтому на рис. 3 показаны остаточные структуры для ОПСС $\mathcal{E}_3$ после всех её трасс.

Далее рассмотрим обладающую свойством СПСЗ ОПСС $\mathcal{E}_4$ из примеров 2–4 с компонентами: $E_4=\{a,b,c\}$; $<_4=\emptyset$; $\sharp_4=\{(a,c),(c,a)\}$; l_4 — идентичная функция; $F_4=\{b\}$; $\prec_4=\{(b,\underline{b})\}$; $\rhd_4=\emptyset$; $C_0^4=\emptyset$. Знаем, что трассы в $\mathcal{E}_4$ — это префиксы последовательностей:

$((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)(\{x\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$,

$((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{x\}\cup\emptyset)((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$,

$((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{x,b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$.

Далее пусть $x\neq x'\in\{a,c\}$. Остаточные структуры для ОПСС $\mathcal{E}_4$ после её некоторых трасс показаны на рис. 4. Также верно:

$\mathcal{E}_4\setminus\epsilon=\mathcal{E}_4\setminus((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^\star$;

$\mathcal{E}_4\setminus(\{b\}\cup\emptyset)=\mathcal{E}_4\setminus(\{b\}\cup\emptyset)((\emptyset\cup\{\underline{b}\})(\{b\}\cup\emptyset))^\star$;

$\mathcal{E}_4\setminus(\{x\}\cup\emptyset)=\mathcal{E}_4\setminus((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^\star(\{x\}\cup\emptyset)((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^\star=((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^\star(\{b\}\cup\emptyset)(\{x\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*=\mathcal{E}_4\setminus((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{x,b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*$;

$\mathcal{E}_4\setminus((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)(\{x\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)=\mathcal{E}_4\setminus((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{x\}\cup\emptyset)((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)=\mathcal{E}_4\setminus((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{x,b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\})((\{b\}\cup\emptyset)(\emptyset\cup\{\underline{b}\}))^*(\{b\}\cup\emptyset)$.

Поэтому на рис. 4 показаны остаточные структуры для ОПСС $\mathcal{E}_4$ после всех её трасс.

$\diamond$

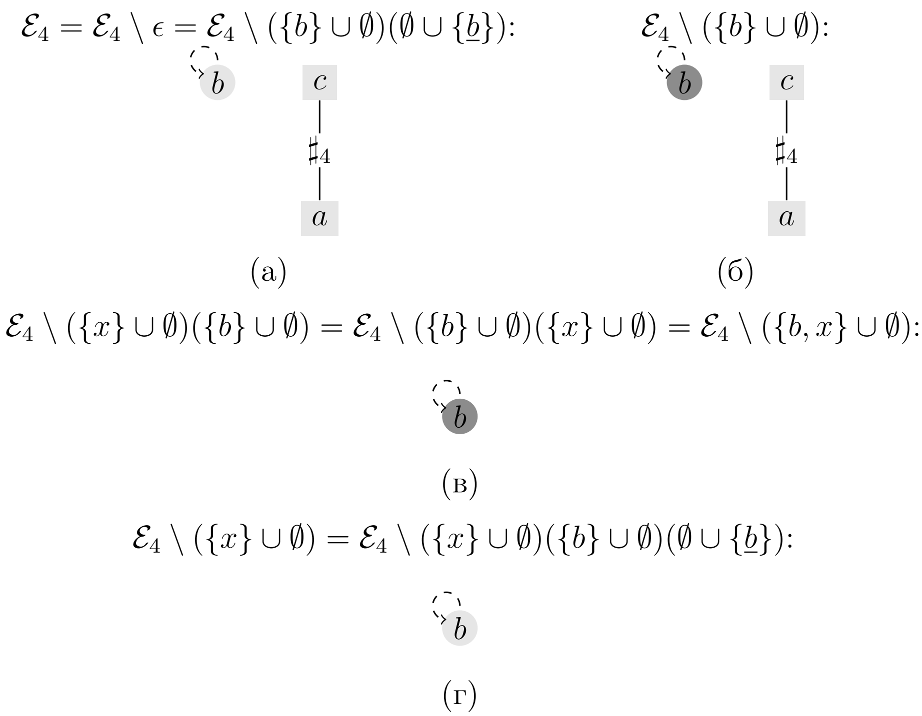

Рис. 4. Остаточные структуры для $\mathcal{E}_4$

Покажем, что остаточные структуры для ОПСС, обладающие свойством СПСЗ, являются инвариантом относительно эквивалентных трасс.

Утверждение 1. *Для ОПСС со свойством СПСЗ $\mathcal{E}$ и трасс $t, t' \in Trace(\mathcal{E})$ таких, что $[t] = [t']$, верно $\mathcal{E} \setminus t = \mathcal{E} \setminus t'$.*

Пример 6. *Рассмотрим обладающую свойством СПСЗ ОПСС $\mathcal{E}_4$ из примеров 2–5. Знаем, что $\{a\}$ — конфигурация в $\mathcal{E}_4$, $t = (\{a\} \cup \emptyset)$ и $t' = (\{b\} \cup \emptyset)(\{a\} \cup \emptyset)(\emptyset \cup \{\underline{b}\})$ — трассы в $\mathcal{E}_4$. По определению 3, получаем, что $last(t) = (C_0^4 \setminus \emptyset) \cup \{a\} = \{a\}$ и $last(t') = (((((C_0^4 \setminus \emptyset) \cup \{b\}) \setminus \emptyset) \cup \{a\}) \setminus \{b\}) \cup \emptyset = \{a\}$, т.е. $t \sim t'$. В примере 5 показано, что $\mathcal{E}_4 \setminus t = \mathcal{E}_4 \setminus t'$.*

Мы оставляем читателю проверку остаточных структур для $\mathcal{E}_4$ после других эквивалентных трасс.

С другой стороны, приведенное выше утверждение неверно для обладающей свойством УПСЗ, но не свойством СПСЗ ОПСС $\mathcal{E}_2$ из примеров 2–5. Знаем, что $\{a, b\}$ — конфигурация в $\mathcal{E}_2$, $t = (\{a\} \cup \emptyset)(\{b\} \cup \emptyset)$ и $t' = (\{b\} \cup \emptyset)(\{a\} \cup \emptyset)$ — трассы в $\mathcal{E}_2$. В силу определения 3, имеем $last(t) = \{a, b\}$ и $last(t') = \{a, b\}$, т.е. $t \sim t'$. В примере 5 показано, что $\breve{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_2 \setminus t \neq \mathcal{E}_2 \setminus t' = \ddot{\mathcal{E}}_2$. $\diamond$

4. Семантика систем переходов для ОПСС

В этом разделе сначала приводятся базовые определения, касающиеся систем переходов, а затем для ОПСС $\mathcal{E}$ определяются отображения $TC(\mathcal{E})$ и $TR(\mathcal{E})$, которые строят два различных типа систем переходов.

На основе множества L действий в ОПСС определим множество $\mathbb{L} := \mathbb{N}_0^L$ (множество мультимножеств на L или функций из L в множество неотрицательных целых чисел), которое будем использовать как множество меток в системах переходов.

Система переходов $\mathcal{T} = (S, \rightarrow, i)$, помеченная на множестве $\mathbb{L}$ меток, состоит их множества S состояний, отношения перехода $\rightarrow \subseteq S \times \mathbb{L} \times S$ и начального состояния $i \in S$. Две системы переходов, помеченные на множестве $\mathbb{L}$, являются *изоморфными*, если существует биекция между их состояниями, сохраняющая отношение перехода и начальное состояние. Будем говорить, что отношение $R \subseteq S \times S'$ является *бисимуляцией* между системами переходов $\mathcal{T} = (S, \rightarrow, i)$ и $\mathcal{T}' = (S', \rightarrow', i')$, помеченными на $\mathbb{L}$, если $(i, i') \in R$ и для всех пар $(s, s') \in R$ и меток $\lambda \in \mathbb{L}$: если $(s, \lambda, s_1) \in \rightarrow$, то $(s', \lambda, s_1') \in \rightarrow'$ и $(s_1, s_1') \in R$ для некоторого состояния $s_1' \in S'$; а также если $(s', \lambda, s_1') \in \rightarrow'$, то $(s, \lambda, s_1) \in \rightarrow$ и $(s_1, s_1') \in R$ для некоторого состояния $s_1 \in S$. Две системы переходов, помеченные на множестве $\mathbb{L}$, являются *бисимуляционными*, если существует отношение бисимуляции между ними.

Определим понятие системы переходов, имеющей в качестве состояний конфигурации ОПСС.

Определение 6. *Для ОПСС $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$, помеченной на множестве L действий,*

$TC(\mathcal{E})$ — конфигурационная система переходов $(Conf(\mathcal{E}), \rightharpoondown, C_0)$, *помеченная на множестве $\mathbb{L}$ меток,*

где $C \overset{M}{\rightharpoondown} C' \iff C \overset{(A \cup \underline{B})}{\rightarrow} C'$ в $\mathcal{E}$ и $M = l(A \cup \underline{B})$.

Объясним приведенное выше определение на примере.

Пример 7. *Рассмотрим ОПСС $\mathcal{E}_3$ (см. примеры 2–5). Из примера 2 знаем, что $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ — конфигурации в $\mathcal{E}_3$. Там также приведены пояснения для переходов между конфигурациями. Используя определения 3 и 6, получаем конфигурационную систему переходов $TC(\mathcal{E}_3)$ (см. рис. 5).* ◇

Теперь рассмотрим определение системы переходов, имеющей в качестве состояний остаточные структуры для ОПСС.

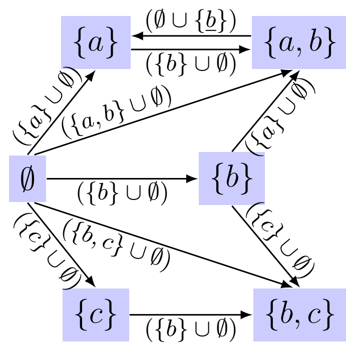

Рис. 5. Конфигурационная система переходов $TC(\mathcal{E}_3)$

Определение 7. *Для ОПСС* $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$, *помеченной на множестве* L *действий,*

$TR(\mathcal{E})$ — остаточная система переходов $(Reach(\mathcal{E}), \rightharpoonup, \mathcal{E})$, *помеченная на множестве* $\mathbb{L}$ *меток,*

где $\mathcal{F} \overset{M}{\rightharpoonup} \mathcal{F}' \iff \mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus (A \cup \underline{B})$ *и* $M = l(A \cup \underline{B})$, *а также* $Reach(\mathcal{E}) = \{\mathcal{F} \mid \exists \mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_k$ $(k \geq 0)$ *такие, что* $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus \epsilon$, $\mathcal{E}_k = \mathcal{F}$ *и* $\mathcal{E}_i \overset{l(A \cup \underline{B})}{\rightharpoonup} \mathcal{E}_{i+1}$ $(0 \leq i < k)\}$.

Проиллюстрируем это определение на примере.

Пример 8. *Рассмотрим ОПСС* $\mathcal{E}_3$ *из примеров 2–5. Используя определения 5 и 7, построим остаточную систему переходов* $TR(\mathcal{E}_3)$ *(см. рис. 6). Видим, что конфигурационная система переходов* $TC(\mathcal{E}_3)$ *(см. рис. 5) и остаточная система переходов* $TR(\mathcal{E}_3)$ *бисимуляционны, но не являются изоморфными.* $\diamond$

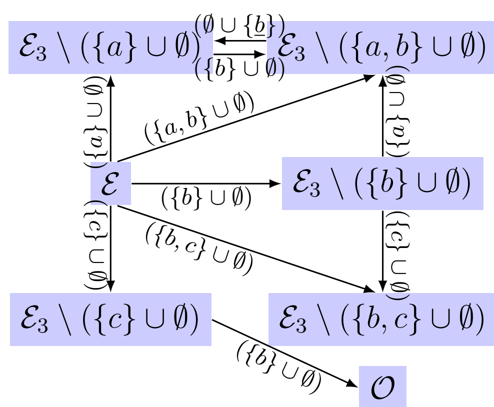

Рис. 6. Остаточная система переходов $TR(\mathcal{E}_3)$

Теорема 1. *Для помеченной на* L *ОПСС* $\mathcal{E}$ *со свойством УПСЗ верно, что* $TC(\mathcal{E})$ *и* $TR(\mathcal{E})$ *бисимуляционно эквивалентны и не являются изоморфными в общем случае.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из статьи [23], но с учетом разницы определения множества предшественников по ПСЗ неотменяемых событий в шаге трассы в определении 5.

5. Теоретико-категорная характеризация отображений $TC(\cdot)$ и $TR(\cdot)$

В этом разделе сначала рассматриваются определения категорий моделей систем переходов и ОПСС, а затем устанавливается, можно ли отображения $TC(\mathcal{E})$ и $TR(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — ОПСС со свойством УПСЗ, расширить до функторов между этими категориями.

Определим понятие морфизма между двумя системами переходов, помеченными на множестве $\mathbb{L}$ меток.

Определение 8. *Пусть $\mathcal{T} = (S, \to, i)$ и $\mathcal{T}' = (S', \to', i')$ — системы переходов, помеченные на множестве $\mathbb{L}$ меток. Функция $\nu : S \to S'$ — это* морфизм *из $\mathcal{T}$ в $\mathcal{T}'$, если верно: $\nu(i) = i'$ и для всех $s, s_1 \in S$ и для всех $\lambda \in \mathbb{L}$ выполняется: если $(s, \lambda, s_1) \in \to$ в $\mathcal{T}$, то $(\nu(s), \lambda, \nu(s_1)) \in \to'$ в $\mathcal{T}'$.*

Видим, что морфизм, определенный выше, представляет понятие симуляции одной системы переходов другой.

Теперь введем понятие морфизма между двумя ОПСС, помеченными на множестве L действий.

Определение 9. *Пусть $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$ и $\mathcal{E}' = (E', <', \sharp', l', F', \prec', \rhd', C_0')$ — ОПСС, помеченные на множестве L действий. Функция $\mu : E \to E'$ — это* морфизм *из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}'$, если верно:*

1) $\forall e \in E \ : \ \lfloor \mu(e) \rfloor_{<'} \subseteq \mu(\lfloor e \rfloor_{<})$[ii];

2) $\forall e, e' \in E \ : \ \mu(e) \ \sharp' \ \mu(e') \ \Rightarrow \ e \ \sharp \ e'$;

3) $\forall e \neq e' \in E \ : \ \mu(e) = \mu(e') \ \Rightarrow \ e \ \sharp \ e'$;

4) $l' \circ \mu = l$;

5) $\mu(F) \subseteq F'$;

6) $\forall u \in F \ : \ \llcorner \underline{\mu(u)} \lrcorner_{\prec'} \subseteq \mu(\llcorner \underline{u} \lrcorner_{\prec})$;

7) $\forall e \in E, \ \forall u \in F \ : \ \mu(e) \rhd' \underline{\mu(u)} \ \Rightarrow \ e \rhd \underline{u}$;

8) $\mu(C_0) = C_0'$.

Покажем, что морфизм, определенный выше, представляет понятие симуляции поведения одной ОПСС поведением другой ОПСС.

[ii]Здесь и далее для подмножества $X \subseteq E$ будем использовать запись $\mu(X)$, чтобы обозначать множество $\{\mu(e) \mid e \in X\}$.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ — ОПСС, помеченные на множестве L действий, и $\mu : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ — морфизм. Если $C \overset{(A \cup B)}{\to} C_1$ в $\mathcal{E}$ для некоторых $C, C_1 \in Conf(\mathcal{E})$, то $\mu(C), \mu(C_1) \in Conf(\mathcal{E}')$ и $\mu(C) \overset{(\mu(A) \cup \mu(B))}{\to} \mu(C_1)$ в $\mathcal{E}'$.*

Определим категории систем переходов и ОПСС со свойством УПСЗ.

Определение 10. *Помеченные на $\mathbb{L}$ системы переходов (помеченные на L ОПСС со свойством УПСЗ) и морфизмы между ними формируют категорию $\mathbf{TS}_{\mathbb{L}}$ ($\mathbf{RPES}_L$), в которой композиция двух морфизмов определяется как обычная композиция функций, а тождественный морфизм является тождественной функцией.*

Лемма 4. *Пусть $\mathbf{RPES}^0_L$ — подкатегория категории $\mathbf{RPES}_L$, содержащая в качестве объектов ОПСС вида $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, \emptyset)$ со свойством УПСЗ. Тогда категория $\mathbf{RPES}^0_L$ имеет копроизведения.*

Утверждение 2. *Отображение TC (TR) может быть расширено (не может быть расширено) до функтора из категории $\mathbf{RPES}_L$ в категорию $\mathbf{TS}_{\mathbb{L}}$.*

Этот результат показывает разницу между отображениями $TC(\mathcal{E})$ и $TR(\mathcal{E})$ для ОПСС $\mathcal{E}$ со свойством УПСЗ.

6. Заключение

В этой статье в контексте обратимых первичных структур событий, учитывающих причинно-следственные зависимости между событиями, была дана теоретико-категорная характеризация построений семантик в терминах систем переходов, основанных на конфигурациях и остаточных структурах. С этой целью, во-первых, была определена (шаговая) семантика рассматриваемой модели обратимых структур событий, которая основана на конфигурациях/трассах и которая строится из начальной конфигурации посредством добавления произошедших параллельных событий и/или посредством отмены ранее произошедших событий. Во-вторых, были исследованы свойства оператора удаления, который используется для построения остаточных структур, получаемых из заданной структуры событий посредством удаления из неё уже произошедших и конфликтующих с ними в ходе выполнения структуры. Есть надежда, что при разработке операционной семантики алгебраических исчислений параллельных процессов полученные здесь результаты могут быть столь же полезны для обратимых первичных структур событий, как и для традиционных (необратимых) (см. [9, 18] среди прочих).

В дальнейшем планируется расширить список рассматриваемых моделей, включив обратимые версии потоковых, расслоенных, обобщенных структур событий с симметричным и асимметричным конфликтом. Другой целью дальнейших исследований является изучение возможности получения изоморфизма, а не бисимуляции, между двумя типами семантик систем переходов за счёт обогащения модели обратимых первичных структур событий событиями, которые присутствуют в структуре, но которые не могут произойти из-за, например, отсутствия транзитивности/ацикличности в ПСЗ, наличия бесконечного количества предшественников по ПСЗ и т.д., как это было сделано для традиционных первичных структур событий в статье [7]. Там авторы смогли доказать, что наличие событий, которые не могут произойти, полезно при сравнительном анализе различных семантик, способствуя устранению несущественных несоответствий между исследуемыми моделями.

Список литературы

1. Грибовская Н.С., Вирбицкайте И.Б.: Семантика систем переходов структур событий с отменяемыми событиями при сохранении причинно-следственной зависимости. Системная информатика, 2024, №24, стр. 59–90.
2. Arbach, Y., Karcher, D., Peters, K., Nestmann, U.: Dynamic causality in event structures. *Lecture Notes in Computer Science* **9039** (2015) 83–97. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-19195-9_6
3. Aubert, C., Cristescu, I.: Contextual equivalences in configuration structures and reversibility. *J. Log. Algebr. Meth. Program.* 86(1), 77–106 (2017) URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2016.08.004
4. Baier, C., Majster-Cederbaum, M.: The connection between event structure semantics and operational semantics for TCSP. *Acta Informatica* 31 (1994). URL: https://doi.org/10.1007/BF01178923
5. Barylska, K., Gogolinska, A., Mikulski, L., Philippou, A., Piatkowski, M., Psara, K.: Formal translation from reversing Petri nets to coloured Petri nets. Lecture Notes in Computer Science, 13352, 172–186 (2022). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-09005-9_12
6. Best, E., Gribovskaya, N., Virbitskaite, I.: Configuration- and residual-based transition systems for event structures with asymmetric conflict. Proc. SofSem 2017, *Lecture Notes in Computer Science* **10139** (2017) 132–146. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-

319-51963-0_11

7. Best, E., Gribovskaya, N., Virbitskaite, I.: From event-oriented models to transition systems. In: Proc. Petri Nets 2018, *Lecture Notes in Computer Science* **10877** (2018) 117–139. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91268-4_7
8. Boudol, G.: Flow event structures and flow nets. *Lecture Notes in Computer Science* **469** (1990) 62–95. URL: https://doi.org/10.1007/3-540-53479-2_4
9. Boudol G., Castellani I.: Concurrency and atomicity. *Theoretical Computer Science* **59** (1988) 25–84. URL: https://doi.org/10.1016/0304-3975(88)90096-5
10. Crafa, S., Varacca, D., Yoshid, N.: Event structure semantics of parallel extrusion in the pi-calculus. *Lecture Notes in Computer Science* **7213** (2012) 225–239.
11. Cristescu, I., Krivine, J., Varacca, D.: A compositional semantics for the reversible pi-calculus. In: Proceedings of LICS 2013. IEEE Computer Society, pp. 388–397 (2013) URL: https://doi.org/10.1109/LICS.2013.45
12. Danos, V., Krivine, J.: Reversible communicating systems. In: Proceedings of CONCUR'04, volume 3170 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 292–307, 2004. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-28644-8_19
13. De Vos, A., De Baerdemacker, S., Van Rentergem, Y.: Synthesis of quantum circuits vs. Synthesis of classical reversible circuits. Synthesis Lectures on Digital Circuits and Systems. Morgan & Claypool Publishers, 2018. URL: https://doi.org/10.2200/S00856ED1V01Y201805DCS054
14. de Frutos Escrig, D., Koutny, M., Mikulski, L.: Reversing steps in Petri nets. In: Donatelli, S., Haar, S. (eds.) PETRI NETS 2019. *Lecture Notes in Computer Science* vol. 11522, pp. 171–191. Springer, Cham (2019). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21571-2 11
15. van Glabbeek, R.J.: On the expressiveness of higher dimensional automata. *Theoretical Computer Science* **356(3)** (2006) 265–290. URL: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2006.02.012
16. van Glabbeek, R.J., Goltz, U.: Refinement of actions and equivalence notions for concurrent systems. Acta Inform. 37, 229–327 (2001) URL: https://doi.org/10.1007/s002360000041
17. van Glabbeek R.J., Plotkin G.D.: Configuration structures, event structures and Petri nets. *Theoretical Computer Science* **410(41)** (2009) 4111-4159. URL: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2009.06.014

18. van Glabbeek, R.J., Vaandrager F.W.: Bundle event structures and CCSP. *Lecture Notes in Computer Science* **2761** (2003) 57–71. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45187-7_4
19. Gorrieri, R., Lanese, I.: Decidable Reversible Equivalences for Finite Petri Nets. CoRR abs/2506.11517 (2025) https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.11517
20. Graversen, E., Phillips, I.C.C., Yoshida, N.: Towards a categorical representation of reversible event structures. J. Log. Algebraic Methods Program. 104: 16–59 (2019) URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2019.01.001
21. Graversen, E., Phillips, I.C.C., Yoshida, N.: Event structure semantics of (controlled) reversible CCS. J. Log. Algebraic Methods Program. 121: 100686 (2021) URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2021.100686
22. Graversen, E., Phillips, I.C.C., Yoshida, N.: Event structures for the reversible early internal π-calculus. *Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming* **124** 100720.
23. Gribovskaya N., Virbitskaite I.: Comparative transition system semantics for cause-respecting reversible prime event structures. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, vol. 386, pp. 112–126.
24. Gribovskaya N., Virbitskaite I.: Transition systems from asymmetric prime event structures with cause-respecting reversibility. To appear in International Journal of Foundations of Computer Science. URL: https://doi.org/10.1142/S0129054125460049
25. Hoogers, P.W., Kleijn, H.C.M., Thiagarajan, P.S.: An event structure semantics for general Petri nets. *Theoretical Computer Science* **153** (1996) 129–170. URL: https://doi.org/10.1016/0304-3975(95)00120-4
26. Kari, J.: Reversible cellular automata: from fundamental classical results to recent developments. New Generation Comput. 36(3), 145–172 (2018) URL: https://doi.org/10.1007/s00354-018-0034-6
27. Katoen, J.-P.: Quantitative and qualitative extensions of event structures. PhD Thesis, Twente University, 1996.
28. Katoen, J.-P., Langerak, R., Latella, D.: Modeling systems by probabilistic process algebra: an event structures approach. *IFIP Transactions* **C-2** (1993) 253–268.
29. S. Kuhn, B. Aman, G. Ciobanu, A. Philippou, K. Psara, and I. Ulidowski. Reversibility in chemical reactions. In I. Ulidowski, I. Lanese, U. P. Schultz, and C. Ferreira, editors, Reversible Computation: Extending Horizons of Computing – Selected Results of

the COST Action IC1405, volume 12070 of Lecture Notes in Computer Science, pages 151–176. Springer, 2020. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-47361-7_7

30. Langerak, R.: Bundle event structures: a non-interleaving semantics for LOTOS. Formal Description Techniques V. *IFIP Transactions* **C-10** (1993) 331–346.
31. Lanese, I., Lienhardt, M., Mezzina, C.A., Schmitt, A., Stefani J.-B.: Concurrent flexible reversibility. In Matthias Felleisen and Philippa Gardner, editors, Programming Languages and Systems – 22nd European Symposium on Programming, ESOP 2013, volume 7792 of Lecture Notes in Computer Science, pages 370–390. Springer, 2013. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-37036-6_21
32. Lanese, I., Mezzina, C.A., Stefani J.-B.: Reversibility in the higher-order π-calculus. Theoretical Computer Science, 625:25–84, 2016. URL: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2016.02.019,
33. Lanese, I., Palacios, A., Vidal, G.: Causal-consistent replay debugging for message passing programs. In J. A. Pérez and N. Yoshida, editors, Formal Techniques for Distributed Objects, Components, and Systems – 39th IFIP WG 6.1 International Conference, FORTE 2019, volume 11535 of Lecture Notes in Computer Science, pages 167–184. Springer, 2019. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21759-4_10
34. Loogen, R., Goltz, U.: Modelling nondeterministic concurrent processes with event structures. *Fundamenta Informatica* **14(1)** (1991) 39–74.
35. Majster-Cederbaum, M., Roggenbach, M.: Transition systems from event structures revisited. *Information Processing Letters* **67(3)** (1998) 119-124. URL: https://doi.org/10.1016/S0020-0190(98)00105-7
36. Medic, D., Mezzina, C. A., Phillips, I., Yoshida, N.: Towards a formal account for software transactional memory. In I. Lanese and M. Rawski, editors, Reversible Computation – 12th International Conference, RC 2020, volume 12227 of Lecture Notes in Computer Science, pages 255–263. Springer, 2020. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-52482-1_16
37. Melgratti, H.C., Mezzina, C.A., Pinna, G.M.: A distributed operational view of reversible prime event structures. In: 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS), 2021, pp. 1–13. URL: https://doi: 10.1109/LICS52264.2021.9470623.
38. Melgratti, H.C., Mezzina, C.A., Ulidowski, I.: Reversing P/T Nets. In:

COORDINATION 2019, volume 11533 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2019 pp. 19–36. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-22397-7_2

39. Nielsen M., Plotkin G., Winskel G.: Petri nets, event structures and domains. *Theoretical Computer Science*, **13**(1) (1981) 85–08. URL: https://doi.org/10.1016/0304-3975(81)90112-2
40. Nielsen M., Thiagarajan P.S.: Regular event structures and finite Petri nets: the conflict-free case. *Lecture Notes in Computer Science* **2360** (2002) 335–351. URL: https://doi.org/10.1007/3-540-48068-4_20
41. Philippou, A., Psara, K.: A collective interpretation semantics for reversing Petri nets. *Theor. Comput. Sci.* **924** (2022) 148–170. URL: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2022.05.016
42. Philippou, A., Psara, K.: Reversible computation in cyclic Petri nets. CoRR abs/2010.04000 (2020) URL: https://arxiv.org/abs/2010.04000
43. Phillips, I.C.C., Ulidowski, I.: A hierarchy of reverse bisimulations on stable configuration structures. Math. Struct. Comput. Sci. 22, 333–372 (2012) URL: https://doi.org/10.1017/S0960129511000429
44. Phillips, I.C.C., Ulidowski, I.: Event identifier logic. Math. Struct. Comput. Sci. 24, 1–51 (2014) URL: https://doi.org/10.1017/S0960129513000510
45. Phillips, I.C.C., Ulidowski, I.: Reversibility and asymmetric conflict in event structures. Logic and Algebraic Methods in Programming 84(6), 781–805 (2015) URL: https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2015.07.004
46. Pinna, G.M.: Reversing steps in membrane systems computations. In: Gheorghe, M., Rozenberg, G., Salomaa, A., Zandron, C. (eds.) CMC 2017. LNCS, vol. 10725, pp. 245–261. Springer, Cham (2018). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-73359-3 16
47. Ulidowski, I., Phillips, I.C.C., Yuen, S.: Reversing event structures. New Generation Computing 36(3), 281–306 (2018) URL: https://doi.org/10.1007/s00354-018-0040-8
48. Winskel, G.: Events in computation. PhD Thesis, University of Edinburgh, 1980.
49. Winskel, G.: Distributed probabilistic and quantum strategies. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* **298** (2013) 403–425. URL: https://doi.org/10.1016/j.entcs.2013.09.024

Приложение А

Приведем базовые определения из теории категорий. Напомним, что категория $\mathcal{C}$ состоит из множества Ob, элементы которого называются объектами категории, и множества Mor, элементы которого называются морфизмами этой категории, при этом

- каждой упорядоченной паре объектов $A, B \in Ob$ сопоставлено некоторое множество морфизмов $Hom(A, B)$ из Mor, а каждому морфизму $f \in Mor$ соответствует единственная упорядоченная пара объектов $A, B \in Ob$ (обозначается $f : A \to B$);
- для любых двух морфизмов $f \in Hom(A, B)$ и $g \in Hom(B, C)$ задана операция композиции морфизмов $g \circ f \in Hom(A, C)$, обладающая ассоциативностью, то есть $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ для всех морфизмов $h \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$ и $f \in Hom(C, D)$;
- для каждого объекта $A \in Ob$ задан тождественный морфизм $id_A \in Hom(A, A)$, действующий тривиально, то есть $f \circ id_A = id_B \circ f = f$ для любого морфизма $f \in Hom(A, B)$.

Будем говорить, что категория $\mathcal{C}$ имеет (конечные) копроизведения, если для любых двух объектов $A, B \in Ob$ существует объект $A \oplus B \in Ob$ и морфизмы $\pi_A : A \to A \oplus B$ и $\pi_B : B \to A \oplus B$ такие, что для любого объекта $C \in Ob$ с любой парой морфизмов $\lambda_A : A \to C$ и $\lambda_B : B \to C$ существует единственный морфизм $\lambda : A \oplus B \to C$ такой, что $\lambda \circ \pi_A = \lambda_A$ и $\lambda \circ \pi_B = \lambda_B$.

Для сравнения двух категорий и построения взаимосвязей между ними в теории категорий используется понятие функтора, то есть отображения, сохраняющего структуру категорий. Формально, функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ между двумя категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ – это отображение, которое каждому объекту $A \in Ob$ категории $\mathcal{C}$ ставит в соответствие объект $F(A) \in Ob'$ категории $\mathcal{C}'$, и каждому морфизму $f : A \to B$ $(A, B \in Ob)$ в категории $\mathcal{C}$ – морфизм $F(f) : F(A) \to F(B)$ в категории $\mathcal{C}'$, при этом $F(id_A) = id_{F(A)}$ и $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$ для всех морфизмов $f : A \to B$ и $g : B \to C$ $(A, B, C \in Ob)$ в категории $\mathcal{C}$.

Приложение Б

Доказательство утверждения 1. Поскольку t (t') — трасса в $\mathcal{E}$, то существует последовательность $C_0 \overset{A_1 \cup B_1}{\to} C_1 \ldots C_{n-1} \overset{A_n \cup B_n}{\to} C_n$ $(n \geq 0)$ $(C_0 \overset{X_1 \cup Y_1}{\to} C'_1 \ldots C'_{m-1} \overset{X_m \cup Y_m}{\to} C'_m$ $(m \geq 0))$ в $\mathcal{E}$. Так как равенство $[t] = [t']$ истинно, то $C_n = C'_m$.

Предложение I. Если $\mathcal{E}$ — ОПСС со свойством СПСЗ, то верно $F^j = F \cap E^j$ для каждого

$1 \le j \le n$.

Доказательство. Пусть $1 \le j \le n$. По определению 5, истинно $F^j = (F^{j-1} \cap E^j) \setminus (\hat{A}_j \cup \hat{\hat{A}}_j)$.

Сначала проверим, что множество $\hat{A}_j$ не пересекается со множеством E^j. Предположим обратное, т.е. существует событие z из E^j такое, что $z \in \hat{A}_j$. В силу определения 5, верно, что $z \in F^{j-1}$ и существует событие $a \in \widetilde{A}_j$ такое, что $a \ \rhd^{j-1} \ \underline{z}$. По лемме 2(а), получаем $a \ \rhd \ \underline{z}$. Поскольку ОПСС $\mathcal{E}$ обладает свойством СПСЗ, то имеем $z < a$. Далее, так как верно $a \in \widetilde{A}_j$, то возможны два случая:

- $a \in A_j \setminus F^{j-1}$. Благодаря лемме 2(г), a принадлежит множеству E^{j-1}. В силу определения 5, получаем $z <^{j-1} a$, так как $z \in F^{j-1} \subseteq E^{j-1}$, т.е. $z \in \lfloor A_j \setminus F^{j-1} \rfloor_{<^{j-1}} \subseteq \widetilde{A}_j$, что противоречит принадлежности события z множеству E^j.
- $a \in \lfloor A_j \setminus F^{j-1} \rfloor_{<^{j-1}}$, т.е. событие a принадлежит множеству E^{j-1} и существует событие $a' \in A_j \setminus F^{j-1}$ такое, что $a <^{j-1} a'$. Более того, по определению 5, имеем $z <^{j-1} a$, так как $z \in F^{j-1} \subseteq E^{j-1}$. Согласно лемме 2(б), $\mathcal{E}^{j-1}$ — ОПСС, обладающая свойством СПСЗ. В силу транзитивности $<^{j-1}$, получаем $z <^{j-1} a'$, т.е. $z \in \lfloor A_j \setminus F^{j-1} \rfloor_{<^{j-1}}$, что вновь противоречит принадлежности события z множеству E^j.

Таким образом, множества $\hat{A}_j$ и E^j не пересекаются.

Теперь покажем, что множество $\hat{\hat{A}}_j$ не пересекается со множеством E^j. Предположим обратное, т.е. существует событие $z \in E^j$ такое, что $z \in \hat{\hat{A}}_j$. По определению 5, это означает, что $z \in F^{j-1}$ и существует событие $a \in \sharp^{j-1}(\widetilde{A}_j)$ такое, что $a \ \prec^{j-1} \ \underline{z}$. Тогда, по лемме 2(а), получаем $a \prec \underline{z}$. Поскольку ОПСС $\mathcal{E}$ обладает свойством СПСЗ, то $z = a$, что противоречит принадлежности события z множеству E^j.

Таким образом, показали, что $F^j = F^{j-1} \cap E^j$ для каждого $1 \le j \le n$. Это позволяет утверждать, что $F^j = F^0 \cap E^1 \cap \ldots \cap E^j$. Однако, благодаря лемме 2(а), знаем, что равенство $E^1 \cap \ldots \cap E^j = E^j$ истинно, т.е. верно $F^j = F \cap E^j$, так как $F^0 = F$. □

Предложение II. Для каждого $1 \le j \le m$ и $\widetilde{x} \in \widetilde{X}_j$ верно, что $\widetilde{x} \in \widetilde{A}_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.

Доказательство. Из определения 5 известно, что $\widetilde{X}_j = (X_j \setminus F'^{j-1}) \ \cup \ \lfloor (X_j \setminus F'^{j-1}) \rfloor_{<'^{j-1}}$. Рассмотрим два случая:

- $\widetilde{x} \in X_j \setminus F'^{j-1}$. Докажем, что $\widetilde{x} \in A_i \setminus F^{i-1}$ для некоторого $1 \le i \le n$. Поскольку $\mathcal{E}$ — ОПСС со свойством СПСЗ, то, благодаря предложению I, имеем $F'^{j-1} = F \cap E'^{j-1}$. Тогда $\widetilde{x} \notin F$, так как, по лемме 2(г), верно $\widetilde{x} \in E'^{j-1}$. Более того, поскольку $\widetilde{x} \in \widetilde{X}_j$, используя лемму 2(д), получаем $\widetilde{x} \in C'_m = C_n$. Согласно определению 3, существует $1 \leq i \leq n$ такое, что $\widetilde{x} \in A_i$. Так как $\widetilde{x} \notin F$, то имеем $\widetilde{x} \in A_i \setminus F^{i-1}$, в силу леммы 2(а).

- $\widetilde{x} \in \lfloor (X_j \setminus F'^{j-1}) \rfloor_{<'^{j-1}}$, т.е. $\widetilde{x} \in E'^{j-1}$ и $\widetilde{x} <'^{j-1} x$ для некоторого $x \in X_j \setminus F'^{j-1}$. Тогда, благодаря лемме 2(а), имеем $\widetilde{x} < x$. Используя предыдущий пункт, получаем, что $x \in A_i \setminus F^{i-1} \subseteq \widetilde{A}_i$ для некоторого $1 \leq i \leq n$. Более того, из леммы 2(г) следует $x \in E^{i-1}$, а из леммы 2(д) — $x \in C_n$. В силу леммы 1, конфигурация C_n лево-замкнута относительно $<$. Тогда верно $\widetilde{x} \in C_n$, поскольку $\widetilde{x} < x$. Далее рассмотрим два случая:
  - $\widetilde{x} \in E^{i-1}$. Благодаря определению 5, получаем $\widetilde{x} <^{i-1} x$, потому что $\widetilde{x} < x$. Так как $x \in A_i \setminus F^{i-1}$, то справедливо $\widetilde{x} \in \lfloor (A_i \setminus F^{i-1}) \rfloor_{<^{i-1}} \subseteq \widetilde{A}_i$.
  - $\widetilde{x} \notin E^{i-1}$. Тогда имеем $\widetilde{x} \in E$ и $\widetilde{x} \notin E^{i-1}$. По определению 5, существует $1 \leq k \leq i-1$ такое, что $\widetilde{x} \in E^{k-1}$ и $\widetilde{x} \notin E^k$, т.е. $\widetilde{x} \in \widetilde{A}_k$ или $\widetilde{x} \in \sharp^{k-1}(\widetilde{A}_k)$. Предположим $\widetilde{x} \in \sharp^{k-1}(\widetilde{A}_k)$, т.е. существует событие $\widetilde{y} \in \widetilde{A}_k$ такое, что $\widetilde{x} \sharp^{k-1} \widetilde{y}$. В силу леммы 2(а), верно $\widetilde{x} \sharp \widetilde{y}$. Кроме того, из леммы 2(д) следует $\widetilde{y} \in C_n$. Это противоречит бесконфликтности конфигурации C_n, так как $\widetilde{x} \in C_n$. Таким образом, верно $\widetilde{x} \in \widetilde{A}_k$ для некоторого $1 \leq k \leq i-1 < n$. □

Проверим, что верно $E^n = E'^m$. Предположим обратное, то есть $E^n \neq E'^m$. Рассмотрим случай, когда существует событие $e \in E^n$ такое, что $e \notin E'^m$ (случай, когда $e \in E'^m$ и $e \notin E^n$ доказывается аналогично). Так как $e \in E$ и $e \notin E'^m$, то существует $1 \leq j \leq m$ такое, что $e \in (\widetilde{X}_j \cup \sharp^{j-1}(\widetilde{X}_j))$, по определению 5. Рассмотрим все возможные случаи:

- $e \in \widetilde{X}_j$. Благодаря предложению II, существует $1 \leq i \leq n$ такое, что $e \in \widetilde{A}_i$. Значит, по определению 5, верно $e \notin E^i$, что противоречит лемме 2(а), поскольку $e \in E^n$.
- $e \in \sharp^{j-1}(\widetilde{X}_j)$, т.е. $e \in E^{j-1}$ и существует событие $x \in \widetilde{X}_j$ такое, что $e \sharp^{j-1} x$. В силу леммы 2(а), имеем $e \sharp x$. По предложению II, существует $1 \leq i \leq n$ такое, что $x \in \widetilde{A}_i$. Отсюда с помощью леммы 2(г) и определения 5 получаем $x \in E^{i-1}$. Согласно лемме 2(а), верно $e \in E^{i-1}$, поскольку $e \in E^n$. Тогда, по определению 5, получаем $e \sharp^{i-1} x$, потому что $e \sharp x$. Следовательно, имеем $e \in \sharp^{i-1}(\widetilde{A}_i)$. Тогда верно $e \notin E^i$, что противоречит лемме 2(а), так как $e \in E^n$.

Таким образом, справедливо $E^n = E'^m$.

Покажем совпадение множеств F^n и F'^m. Поскольку $\mathcal{E}$ — ОПСС со свойством СПСЗ, то, по предложению I, верно $F^n = F \cap E^n$ и $F'^m = F \cap E'^m$. Отсюда заключаем, что $F^n = F'^m$, поскольку множества E^n и E'^m совпадают.

Далее рассмотрим помечающие функции. В силу определения 5, известно, что $l^n =$

$l\mid_{E^1\cap\ldots\cap E^n}$ и $l'^m = l\mid_{E'^1\cap\ldots\cap E'^m}$. По лемме 2(a), истинно, что $E^n \subseteq E^i$ для всех $1 \le i \le n$ и $E'^m \subseteq E'^j$ для всех $1 \le j \le m$. Тогда имеем, что $l^n = l\mid_{E^n}$ и $l'^m = l\mid_{E'^m}$. Отсюда из равенства множеств E^n и E'^m получаем совпадение функций $l^n = l'^m$.

Аналогичным образом из равенства множеств $E^n = E'^m$ и $F^n = F'^m$ следует совпадение отношений $\nabla^n = \nabla'^m$, где $\nabla \in \{<, \sharp, \prec, \rhd\}$.

И, наконец, проверим совпадение начальных конфигураций. Из леммы 2(e) знаем, что $C_0^n = C_n \cap E^n$ и $C_0'^m = C'_m \cap E'^m$. Поскольку верно $C_n = C'_m$, то имеем $C_0^n = C_0'^m$, в силу совпадения множеств E^n и E'^m.

Таким образом, справедливо $\mathcal{E} \setminus t = \mathcal{E} \setminus t'$. □

Доказательство леммы 3. Предположим, что $\mathcal{E} = (E, <, \sharp, l, F, \prec, \rhd, C_0)$ и $\mathcal{E}' = (E', <', \sharp', l', F', \prec', \rhd', C'_0)$ — ОПСС со свойством УПСЗ, помеченные на множестве L, и $\mu : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ — морфизм между ними. По определению 9, μ — это функция из E в E' такая, что

1) $\forall e \in E :\ \lfloor \mu(e) \rfloor_{<'} \subseteq \mu(\lfloor e \rfloor_{<})$;
2) $\forall e, e' \in E :\ \mu(e) \sharp' \mu(e') \ \Rightarrow\ e \sharp e'$;
3) $\forall e \neq e' \in E :\ \mu(e) = \mu(e') \ \Rightarrow\ e \sharp e'$;
4) $l' \circ \mu = l$;
5) $\mu(F) \subseteq F'$;
6) $\forall u \in F :\ \llcorner \underline{\mu(u)} \lrcorner_{\prec'} \subseteq \mu(\llcorner \underline{u} \lrcorner_{\prec})$;
7) $\forall e \in E,\ \forall u \in F :\ \mu(e) \rhd' \underline{\mu(u)} \ \Rightarrow\ e \rhd \underline{u}$;
8) $\mu(C_0) = C'_0$.

Предложение III. Пусть $C_0 \stackrel{A_1\cup\underline{B}_1}{\longrightarrow} \ldots \stackrel{A_n\cup\underline{B_n}}{\longrightarrow} C_n$ в $\mathcal{E}$. Тогда верно $\mu(C_0) \stackrel{\mu(A_1)\cup\underline{\mu(B_1)}}{\longrightarrow} \ldots \stackrel{\mu(A_n)\cup\underline{\mu(B_n)}}{\longrightarrow} \mu(C_n)$ в $\mathcal{E}'$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n.

$n = 0$ Тогда имеем $\mu(C_0) = C'_0$, по пункту 8) определения 9.

$n > 0$ Предположим, что $\mu(C_0) \stackrel{(\mu(A_1)\cup\underline{\mu(B_1)})}{\longrightarrow} \ldots \stackrel{(\mu(A_{n-1})\cup\underline{\mu(B_{n-1})})}{\longrightarrow} \mu(C_{n-1})$ в $\mathcal{E}'$. Покажем, что $\mu(C_{n-1}) \stackrel{(\mu(A_n)\cup\underline{\mu(B_n)})}{\longrightarrow} \mu(C_n)$ в $\mathcal{E}'$. Тогда, в силу определения 3, получаем $\mu(C_{n-1}) \in Conf(\mathcal{E}')$, а также $\mu(C_{n-1})$ — конечное и бесконфликтное множество. Кроме того, $\mu(C_{n-1})$ лево-замкнуто относительно $<$, по лемме 1. Далее, согласно определению 9, имеем, что $\mu(A_n) \subseteq E'$ и $\mu(B_n) \subseteq \mu(F) \subseteq F'$, так как $B_n \subseteq F$. Осталось показать, что шаг $(\mu(A_n) \cup \underline{\mu(B_n)})$ возможен из конфигурации $\mu(C_{n-1})$ в $\mathcal{E}'$. Проверим справедливость пунктов а)-г) определения 3.

а) Так как шаг $(A_n \cup \underline{B_n})$ возможен из конфигурации C_{n-1} в $\mathcal{E}$, то $A_n \cap C_{n-1} = \emptyset$, $B_n \subseteq C_{n-1}$ и $(C_{n-1} \cup A_n)$ — конечное и бесконфликтное множество. Предположим $\mu(A_n) \cap \mu(C_{n-1}) \neq \emptyset$, т.е. существуют $a \in A_n$ и $x \in C_{n-1}$ такие, что $\mu(a) = \mu(x)$. Так как имеем $(A_n \cap C_{n-1}) = \emptyset$, то верно $a \neq x$. По пункту 3) определения 9, получаем $a \sharp x$, что противоречит бесконфликтности множества $(C_{n-1} \cup A_n)$. Таким образом, имеем $\mu(A_n) \cap \mu(C_{n-1}) = \emptyset$. Вложение $\mu(B_n) \subseteq \mu(C_{n-1})$ очевидным образом следует из вложения $B_n \subseteq C_{n-1}$. Конечность множества $(\mu(C_{n-1}) \cup \mu(A_n))$ обеспечивается конечностью множества $(C_{n-1} \cup A_n)$. Осталось проверить бесконфликтность этого множества. Предположим обратное, т.е. существуют $z,\ z' \in (\mu(C_{n-1}) \cup \mu(A_n))$ такие, что $z \sharp' z'$. Тогда существуют $a, b \in (C_{n-1} \cup A_n)$ такие, что $\mu(a) = z$ и $\mu(b) = z'$. По пункту 2) определения 9, получаем $a \sharp b$, что противоречит бесконфликтности множества $(C_{n-1} \cup A_n)$. Таким образом, $(\mu(C_{n-1}) \cup \mu(A_n))$ — бесконфликтное множество.

б) Пусть $e \in \mu(A_n)$, $e' \in E'$ и $e' <' e$. Тогда существует $a \in A_n$ такое, что $e = \mu(a)$. Кроме того, имеем $e' \in \lfloor e \rfloor_{<'}$, по определению 2. Благодаря пункту 1) определения 9, верно $e' \in \mu(\lfloor a \rfloor_{<})$, т.е. справедливо $e' = \mu(e_1)$ для некоторого события $e_1 \in E$ такого, что $e_1 < a$. Поскольку шаг $(A_n \cup \underline{B_n})$ возможен из конфигурации C_{n-1} в $\mathcal{E}$, то событие e_1 принадлежит множеству $C_{n-1} \setminus B_n$, а значит, событие e' принадлежит множеству $\mu(C_{n-1} \setminus B_n) \subseteq \mu(C_{n-1})$. Осталось проверить, что событие e' не принадлежит множеству $\mu(B_n)$. Предположим обратное, т.е. существует событие $b \in B_n$ такое, что $e' = \mu(b)$. Однако, поскольку верно $e' = \mu(e_1)$, то, благодаря пункту 3) определения 9, получаем: либо $e_1 = b$, что противоречит принадлежности события e_1 множеству $(C_{n-1} \setminus B_n)$, либо $e_1 \sharp b$, что противоречит бесконфликтности множества C_{n-1}, с учетом $B_n \subseteq C_{n-1}$. Таким образом, событие e' принадлежит множеству $(\mu(C_{n-1}) \setminus \mu(B_n))$.

в) Пусть $e \in \mu(B_n)$, $e' \in E'$ и $e' \prec' \underline{e}$. Тогда существует $a \in B_n$ такое, что $e = \mu(a)$. Кроме того, имеем $e' \in \llcorner e \lrcorner_{\prec'}$, по определению 2. Используя пункт 6) определения 9, получаем $e' \in \mu(\llcorner a \lrcorner_{\prec})$, т.е. $e' = \mu(e_1)$ для некоторого e_1 такого, что $e_1 \prec \underline{a}$. Поскольку шаг $(A_n \cup \underline{B_n})$ возможен из конфигурации C_{n-1} в $\mathcal{E}$, то $e_1 \in (C_{n-1} \setminus (B_n \setminus \{a\})) \subseteq C_{n-1}$. Так как верно $e' = \mu(e_1)$, то имеем $e' \in \mu(C_{n-1})$. Осталось убедиться в том, что $e' \notin (\mu(B_n) \setminus \mu(\{a\}))$. Предположим обратное, т.е. $e' = \mu(b)$ для некоторого события $b \in B_n$, неравного событию a. Из равенства $e' = \mu(e_1)$ следует $\mu(e_1) = \mu(b)$. Благодаря пункту 3) определения 9, получаем: либо $e_1 = b$, что противоречит принадлежности события e_1 множеству $C_{n-1} \setminus (B_n \setminus \{a\})$, либо $e_1 \sharp b$, что противоречит бесконфликтности множества C_{n-1}, с учетом $B_n \subseteq C_{n-1}$. Следовательно, событие $e' = \mu(e_1)$ принадлежит множеству $\mu(C_{n-1}) \setminus (\mu(B_n) \setminus \mu(\{a\}))$.

г) Пусть $e \in \mu(B_n)$, $e' \in E'$ и $e' \rhd' \underline{e}$. Тогда существует $a \in B_n$ такое, что $e = \mu(a)$. Проверим два возможных варианта:

– $e' \notin \mu(E)$. Очевидно, что $e' \notin (\mu(C_{n-1}) \cup \mu(A_n))$, так как $C_{n-1},\ A_n \subseteq E$.

– $e' \in \mu(E)$. Это означает, что $e' = \mu(e_1)$ для некоторого $e_1 \in E$. Благодаря пункту 7) определения 9, верно $e_1 \rhd \underline{a}$, поскольку $a \in B_n \subseteq F$. Так как шаг $(A_n \cup \underline{B_n})$ возможен из конфигурации C_{n-1} в $\mathcal{E}$, то имеем $e_1 \notin (C_{n-1} \cup A_n)$. Следовательно, получаем $e' = \mu(e_1) \notin \mu(C_{n-1} \cup A_n) = (\mu(C_{n-1}) \cup \mu(A_n))$.

Отсюда заключаем, что шаг $(\mu(A_n) \cup \underline{\mu(B_n)})$ возможен из $\mu(C_{n-1})$ в $\mathcal{E}'$ и приводит в конфигурацию $Y = (\mu(C_{n-1}) \setminus \mu(B_n)) \cup \mu(A_n)$. Проверим справедливость $Y = \mu(C_n)$. Очевидно, имеем $\mu(C_n) = \mu((C_{n-1} \setminus B_n) \cup A_n) = \mu(C_{n-1} \setminus B_n) \cup \mu(A_n)$. Покажем, справедливость $\mu(C_{n-1} \setminus B_n) = \mu(C_{n-1}) \setminus \mu(B_n)$.

Пусть $d \in \mu(C_{n-1} \setminus B_n)$, т.е существует событие $c \in C_{n-1} \setminus B_n$ такое, что $\mu(c) = d$. Так как имеем $c \in C_{n-1}$, то верно $d = \mu(c) \in \mu(C_{n-1})$. Предположим $d \in \mu(B_n)$, т.е. существует событие $b \in B_n$ такое, что $\mu(b) = d$. Поскольку событие c принадлежит множеству $(C_{n-1} \setminus B_n)$, то события c и b не могут быть равными. Тогда по пункту 3) определения 9, верно $c \sharp b$, что противоречит бесконфликтности множества C_{n-1}, с учетом $B_n \subseteq C_{n-1}$. Значит, имеем $d \in (\mu(C_{n-1}) \setminus \mu(B_n))$.

Теперь пусть $d \in (\mu(C_{n-1}) \setminus \mu(B_n))$, т.е. $d \in \mu(C_{n-1})$ и $d \notin \mu(B_n)$. Так как d принадлежит множеству $\mu(C_{n-1})$, то существует событие $c \in C_{n-1}$ такое, что $\mu(c) = d$. Предположим, что верно $c \in B_n$. Тогда имеем $\mu(c) \in \mu(B_n)$, что противоречит $d = \mu(c)$. Следовательно, верно $c \in (C_{n-1} \setminus B_n)$. Это влечёт принадлежность события d множеству $\mu(C_{n-1} \setminus B_n)$.

Отсюда заключаем, что $Y = \mu(C_n)$. □

Возьмём две произвольные конфигурации $C, C' \in Conf(\mathcal{E})$ такие, что $C \xrightarrow{A \cup \underline{B}} C'$ в $\mathcal{E}$. Так как верно $C \in Conf(\mathcal{E})$, то, по определению 3, существуют множества $A_i \subseteq E$ и $B_i \subseteq F$ $(1 \leq i \leq n-1)$ такие, что $C_{i-1} \xrightarrow{A_i \cup \underline{B}_i} C_i$ и $C_{n-1} = C$. Тогда получаем, что $C_0 \xrightarrow{A_1 \cup \underline{B}_1} \dots \xrightarrow{A_{n-1} \cup \underline{B}_{n-1}} C \xrightarrow{A \cup \underline{B}} C'$ в $\mathcal{E}$. По предложению III, имеем, что $\mu(C_0) \xrightarrow{\mu(A_1) \cup \underline{\mu(B_1)}} \dots \xrightarrow{\mu(A_{n-1}) \cup \underline{\mu(B_{n-1})}}$

$\mu(C) \overset{\mu(A)\cup\mu(B)}{\longrightarrow} \mu(C')$ в $\mathcal{E}'$. Из пункта 8 определения 9 знаем, что $\mu(C_0) = C'_0$. Тогда, по определению 3, верно $\mu(C), \mu(C') \in Conf(\mathcal{E}')$. □

Доказательство леммы 4. Для доказательства достаточно построить копроизведение для двух произвольных ОПСС $\mathcal{E}_i = (E_i,\ <_i,\ \sharp_i,\ l_i,\ F_i,\ \prec_i,\ \rhd_i,\ \emptyset)$ $(i = 1,2)$. Построим структуру $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ как дизъюнктивное объединение следующим образом: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = (E,\ <,\ \sharp,\ l,\ F,\ \prec,\ \rhd,\ \emptyset)$, где

- $E = \{(i,e) \mid i \in \{1,2\}, e \in E_i\}$ и $F = \{(i,e) \mid i \in \{1,2\}, e \in F_i\}$;
- для всех $(i,e), (j,e') \in E$ пусть $(i,e)\ <\ (j,e')$ тогда и только тогда, когда $i = j$ и $e\ <_i e'$;
- для всех $(i,e), (j,e') \in E$ пусть $(i,e)\ \sharp\ (j,e')$ тогда и только тогда, когда $i \neq j$ или $(i = j$ и $e\ \sharp_i\ e')$;
- для всех $(i,e) \in E$ функция пометки сохраняется, т.е. $l((i,e)) = l_i(e)$;
- для всех $(i,e) \in E$ и $(j,e') \in F$ отношение $\prec$ определено следующим образом: $(i,e) \prec \underline{(j,e')}$ тогда и только тогда, когда $i = j$ и $e\ \prec_i \underline{e'}$;
- для всех $(i,e) \in E$ и $(j,e') \in F$ пусть $(i,e)\ \rhd\ \underline{(j,e')}$ тогда и только тогда, когда $i \neq j$ или $(i = j$ и $e\ \rhd_i \underline{e'})$.

Учитывая, что $\mathcal{E}_i$ $(i = 1,2)$ — это ОПСС со свойством УПСЗ, с помощью определения 2 нетрудно видеть, что построенная структура $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ является объектом категории $\mathbf{RPES}^0_L$.

Определим два проектирующих отображения $\pi_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ $(i = 1,2)$ по следующему правилу: $\pi_i(e) = (i,e)$ для всех $e \in E_i$ $(i = 1,2)$. Проверим, что π_i $(i = 1,2)$ действительно являются морфизмами категории $\mathbf{RPES}^0_L$.

1) Пусть $e \in E_i$. Тогда $\lfloor \pi_i(e) \rfloor_< = \lfloor (i,e) \rfloor_< = \pi_i(\lfloor e \rfloor_{<_i})$, по определению отношения $<$.
2) Пусть $e, e' \in E_i$ и при этом $\pi_i(e)\ \sharp\ \pi_i(e')$. Это означает, что верно $(i,e)\ \sharp\ (i,e')$. Далее, по определению отношения $\sharp$, получаем $e\ \sharp_i\ e'$.
3) Теперь предположим, что существуют $e \neq e' \in E_i$ такие, что $\pi_i(e) = \pi_i(e')$. По определению отображения π_i, имеем $(i,e) = (i,e')$, что противоречит $e \neq e'$. Значит, наше предположение неверно.
4) По определению функции l, верно, что $l \circ \pi_i(e) = l((i,e)) = l_i(e)$ для любого $e \in E_i$.
5) Пусть $e \in F_i$. Тогда имеем $\pi_i(e) = (i,e) \in F$, по определению множества F.
6) Пусть $u \in F_i$. Рассмотрим множество $\llcorner \underline{\pi_i(u)} \lrcorner_\prec$. Очевидно, что $\pi_i(u) = (i,u)$ и, кроме того, $\llcorner \underline{(i,u)} \lrcorner_\prec = \pi_i(\llcorner \underline{(u)} \lrcorner_{\prec_i})$, по определению отношения $\prec$.
7) Предположим, что $e \in E_i$ и $u \in F_i$ такие, что $\pi_i(e) \rhd \underline{\pi_i(u)}$, т.е. $(i,e) \rhd \underline{(i,u)}$. Отсюда,

благодаря определению отношения $\rhd$, получаем $e \ \rhd_i \ \underline{u}$.

8) Так как начальные конфигурации — пустые множества, то верно $\pi_i(\emptyset) = \emptyset$.

Для завершения доказательства необходимо для любого объекта $\mathcal{E}'$ и пары морфизмов $\lambda_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}'$ $(i = 1, 2)$ категории $\mathbf{RPES}_L^0$ показать существование и единственность морфизма $\lambda : \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}'$ такого, что $\lambda \circ \pi_i = \lambda_i$ $(i = 1, 2)$. Для любого события $(i, e) \in E$ определим отображение $\lambda((i, e)) = \lambda_i(e) \in E'$, которое очевидным образом удовлетворяет последнему равенству для $i = 1, 2$. Единственность отображения следует из построения проекций π_i. Проверим, что λ является морфизмом категории $\mathbf{RPES}_L^0$.

1) Пусть $(i, e) \in E$. Тогда верно $\lfloor \lambda((i, e)) \rfloor_{<'} = \lfloor \lambda_i(e) \rfloor_{<'} \subseteq \lambda_i(\lfloor e \rfloor_{<_i})$, поскольку λ_i является морфизмом. Так как $\lambda_i = \lambda \circ \pi_i$, то $\lambda_i(\lfloor e \rfloor_{<_i}) = \lambda \circ \pi_i(\lfloor e \rfloor_{<_i})$. По построению структуры $\mathcal{E}$, выполняется $\pi_i(\lfloor e \rfloor_{<_i}) = \lfloor (i, e) \rfloor_{<}$, т.е. $\lfloor \lambda((i, e)) \rfloor_{<'} \subseteq \lambda(\lfloor (i, e) \rfloor_{<})$.
2) Пусть $(i, e), (j, e') \in E$ и $\lambda((i, e)) \ \sharp' \ \lambda((j, e'))$, т.е. $\lambda_i(e) \ \sharp' \ \lambda_j(e')$. Если $i \neq j$, то $(i, e) \ \sharp \ (j, e')$, по определению отношения $\sharp$ в $\mathcal{E}$. Когда $i = j$, то, поскольку λ_i является морфизмом, заключаем, что верно $e \ \sharp_i \ e'$. А это, вновь в силу определения отношения $\sharp$ в $\mathcal{E}$, позволяет сделать вывод, что справедливо $(i, e) \ \sharp \ (j, e')$.
3) Выберем произвольным образом два события $(i, e) \neq (j, e') \in E$ такие, что $\lambda((i, e)) = \lambda((j, e'))$, т.е. $\lambda_i(e) = \lambda_j(e')$. Если $i \neq j$, то, по определению отношения $\sharp$ в $\mathcal{E}$, получаем $(i, e) \ \sharp \ (j, e')$. Когда $i = j$, поскольку λ_i является морфизмом, то верно $e \ \sharp_i \ e'$. Тогда, вновь, в силу определения отношения $\sharp$ в $\mathcal{E}$, получаем $(i, e) \ \sharp \ (j, e')$.
4) Так как λ_i — морфизм, то имеем $l' \circ \lambda_i = l_i$. Отсюда, по определению функций λ и l, верно, что $l' \circ \lambda((i, e)) = l'(\lambda_i(e)) = l_i(e) = l((i, e))$ для любого $(i, e) \in E$.
5) Нетрудно заметить, что выполняется следующее: $\lambda(F) = \lambda(\{(i, e) \mid e \in F_i, \ i = 1, 2\}) = \{\lambda_i(e) \mid e \in F_i, \ i = 1, 2\} = \lambda_1(F_1) \cup \lambda_2(F_2) \subseteq F'$, так как λ_i является морфизмом.
6) Пусть $(i, e) \in F$. Тогда верно $\llcorner \underline{\lambda((i, e))} \lrcorner_{\prec'} = \llcorner \underline{\lambda_i(e)} \lrcorner_{\prec'} \subseteq \lambda_i(\llcorner e \lrcorner_{\prec_i})$, поскольку λ_i является морфизмом. Так как $\lambda_i = \lambda \circ \pi_i$, то справедливо $\lambda_i(\llcorner e \lrcorner_{\prec_i}) = \lambda \circ \pi_i(\llcorner e \lrcorner_{\prec_i})$. Однако, по построению структуры $\mathcal{E}$, верно $\pi_i(\llcorner e \lrcorner_{\prec_i}) = \llcorner (i, e) \lrcorner_{\prec}$.
7) Выберем произвольным образом два события $(i, e) \in E$ и $(j, e') \in F$ такие, что $\lambda(i, e) \rhd' \underline{\lambda(j, e')}$, т.е. $\lambda_i(e) \rhd' \ \underline{\lambda_j(e')}$. Если $i = j$, т.е. $\lambda_i(e) \rhd' \ \underline{\lambda_i(e')}$, то, так как λ_i — морфизм, известно, что $e \ \rhd_i \ \underline{e'}$. Это означает, что $(i, e) \rhd \underline{(i, e')}$. Пусть $i \neq j$. Тогда, согласно определению отношения $\rhd$ в $\mathcal{E}$, верно $(i, e) \rhd \underline{(j, e')}$.
8) И, наконец, имеем $\lambda(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = \emptyset$. □

Доказательство утверждения 2.

Пусть $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \sharp_1, l_1, F_1, \prec_1, \rhd_1, C_0^1)$ и $\mathcal{E}_2 = (E_1, <_2, \sharp_2, l_2, F_2, \prec_2, \rhd_2, C_0^2)$ — ОПСС со свойством УПСЗ и $\mu : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ — морфизм категории $\mathbf{RPES}_L$.

Расширим отображение TC до функтора, а именно определим, как это отображение преобразует морфизмы категории $\mathbf{RPES}_L$ в морфизмы категории $\mathbf{TS}_L$. Определим отображение $TC(\mu)$ следующим образом: пусть $TC(\mu)(C) = \mu(C) \in Conf(\mathcal{E}_2)$ для всех $C \in Conf(\mathcal{E}_1)$. Проверим, что $TC(\mu)$ является морфизмом из $TC(\mathcal{E}_1)$ в $TC(\mathcal{E}_2)$ в категории $\mathbf{TS}_{\mathbb{L}}$.

Очевидно, что $TC(\mu)(C_0^1) = \mu(C_0^1) = C_0^2$, по пункту 8) определения 9.

Пусть конфигурации $C, C' \in Conf(\mathcal{E}_1)$ выбраны так, что $C \stackrel{M}{\rightharpoondown} C'$. По определению отношения $\rightharpoondown$, имеем $C \stackrel{A \cup \underline{B}}{\longrightarrow} C'$ в $\mathcal{E}_1$ для некоторых множеств $A \subseteq E_1$ и $B \subseteq F_1$ таких, что $M = l_1(A \cup \underline{B})$. Другими словами, шаг $A \cup \underline{B}$ возможен из конфигурации C и его выполнение приводит к конфигурации $C' = (C \setminus B) \cup A$. Используя лемму 3, получаем, что $\mu(C), \mu(C') \in Conf(\mathcal{E}_2)$ и $\mu(C) \stackrel{\mu(A) \cup \underline{\mu(B)}}{\longrightarrow} \mu(C')$ в $\mathcal{E}_2$. Поскольку отображение μ является морфизмом категории $\mathbf{RPES}_L$, то $l_2 \circ \mu = l_1$ по пункту 4) определения 9. Следовательно, верно $M = l_1(A \cup \underline{B}) = l_2 \circ \mu(A \cup \underline{B}) = l_2(\mu(A) \cup \underline{\mu(B)})$. Однако, в соответствии с определением отношения $\rightharpoondown$, это означает, что $TC(\mu)(C) = \mu(C) \stackrel{M}{\rightharpoondown} \mu(C') = TC(\mu)(C')$. Таким образом, $TC(\mu)$ — морфизм в категории $\mathbf{TS}_L$.

Заметим, что при таком определении $TC(\mu)$ естественным образом сохраняются тождественные морфизмы и композиции морфизмов, а значит, TC — функтор.

Рассмотрим ОПСС $\mathcal{E}^* = (E^*, <^*, \sharp^*, l^*, F^*, \prec^*, \rhd^*, C_0^*)$ со свойством УПСЗ, где $E^* = \{a, b\}$, $<^* = \emptyset$, $\sharp^* = \emptyset$, l^* — идентичная функция, $F^* = \emptyset$, $\prec^* = \emptyset$, $\rhd^* = \emptyset$ и $C_0^* = \emptyset$. Очевидно, что для ОПСС $\mathcal{E}^*$ и $\mathcal{E}_2$ из примера 2 не существует ни одного морфизма категории $\mathbf{TS}_{\mathbb{L}}$, который бы отображал систему переходов $TR(\mathcal{E}^*)$ в систему переходов $TR(\mathcal{E}_2)$. Однако отображение $\eta : \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}_2$ такое, что $\eta(a) = a$ и $\eta(b) = b$, является морфизмом категории $\mathbf{RPES}_L$. Значит, отображение TR нельзя расширить до функтора между категориями $\mathbf{RPES}_L$ и $\mathbf{TS}_{\mathbb{L}}$. $\square$